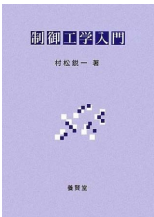


制御工学演習：古典制御

最終更新日：2025 年 7 月 1 日
山形大学工学部
村松

教科書として「制御工学入門」，養賢堂，村松鋭一著を用いています．



授業の進行とともに少しずつ更新しています．解答がないページがありますが，授業が進むごとに追加して掲載していきます．

目 次

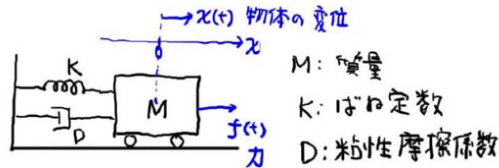
1	伝達関数	3
1.1	機械の伝達関数 (1)	3
1.2	機械の伝達関数 (2)	4
2	ブロック線図	6
2.1	ブロック線図から伝達関数を求める	6
2.2	ブロック線図から伝達関数を求める	7
2.3	既知の結合の利用	12
3	ステップ応答	13
3.1	ステップ応答の計算 (1)	13
3.2	ステップ応答の計算 (2)	15
3.3	ステップ応答の計算 (3)	16
3.4	1 次系のステップ応答	18
3.5	2 次系のステップ応答	19
3.6	応答の重ね合わせ，不安定零点	20
4	システムの安定性	21
4.1	システムの安定判別	21
4.2	ラウスの方法	23
4.3	フルビッツの方法	26

5	周波数応答	28
5.1	応答の計算	28
5.2	応答から伝達関数を求める (1)	29
5.3	応答から伝達関数を求める (2)	31
6	フィードバックシステムの安定性	38
6.1	極を配置する問題	38
6.2	外乱に対する考察	39
6.3	フィードバック制御系の安定条件	41
7	ナイキストの安定判別	42
8	安定余裕	48
8.1	ゲイン余裕 (1)	48
8.2	位相余裕 (1)	49
8.3	位相余裕 (2)	51
9	定常偏差	52
9.1	定常位置偏差・定常速度偏差	52
9.2	定常偏差	54
10	制御系設計・総合問題	55
10.1	さまざまな入力に対する定常応答	55
10.2	PID 制御	57

1 伝達関数

1.1 機械の伝達関数 (1)

つぎの図の機械について考える．質量 M の物体がばね定数 K のばねと粘性摩擦係数 D のダッシュポットにつながれている．物体のつり合いの位置を原点として，右向きを正とした座標軸での変位を $x(t)$ とする．物体に加える力を右向きを正として $f(t)$ とする．



(i) 力 $f(t)$ と変位 $x(t)$ の関係を微分方程式で表せ．

(ii) f から x への伝達関数を求めよ．

(解答)

(i)

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = f(t) - Kx(t) - D \frac{dx(t)}{dt}$$

(ii)

両辺をラプラス変換して

$$s^2 X(s) = F(s) - KX(s) - DsX(s)$$

$$(Ms^2 + Ds + K)X(s) = F(s)$$

$$X(s) = \frac{1}{Ms^2 + Ds + K} F(s)$$

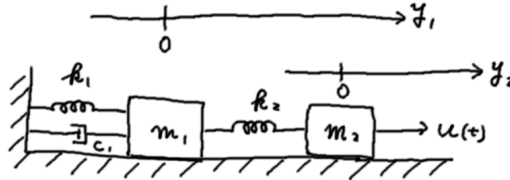
伝達関数は

$$\frac{1}{Ms^2 + Ds + K}$$

である．

1.2 機械の伝達関数 (2)

つぎの図の機械について考える．質量 m_1 の物体 1 がばね定数 k_1 のばねと粘性摩擦係数 c_1 のダッシュポットにつながれている． m_2 の物体 2 がばね定数 k_2 のばねで物体 1 につながれている．物体 1 と 2 それぞれのつり合いの位置を原点として，右向きを正とした座標軸での変位を y_1, y_2 とする．物体 2 に加える力を右向きを正として $u(t)$ とする．



(i) 物体 1 と 2 の運動方程式を書け．

(ii) u から y_1 への伝達関数を求めよ．

(解答)

(i)

$$m_1 \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} = -k_1 y_1(t) - c_1 \frac{dy_1(t)}{dt} + k_2 (y_2(t) - y_1(t))$$

$$m_2 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} = -k_2 (y_2(t) - y_1(t)) + u(t)$$

(ii) 両辺をラプラス変換して

$$m_1 s^2 y_1(s) = -k_1 y_1(s) - c_1 s y_1(s) + k_2 (y_2(s) - y_1(s)) \quad (1)$$

$$m_2 s^2 y_2(s) = -k_2 (y_2(s) - y_1(s)) + u(s) \quad (2)$$

(1) 式より，

$$\{m_1 s^2 + c_1 s + (k_1 + k_2)\} y_1(s) = k_2 y_2(s)$$

$$y_2(s) = \frac{m_1 s^2 + c_1 s + (k_1 + k_2)}{k_2} y_1(s) \quad (3)$$

(2) 式に代入して $y_2(s)$ を消去する．

$$\begin{aligned} & \frac{m_1 m_2 s^4 + m_2 c_1 s^3 + m_2 (k_1 + k_2) s^2}{k_2} y_1(s) \\ & + \frac{m_1 k_2 s^2 + c_1 k_2 s + k_2 (k_1 + k_2)}{k_2} y_1(s) - k_2 y_1(s) \\ & = u(s) \end{aligned} \quad (4)$$

これをさらに変形して，

$$\begin{aligned} & \frac{m_1 m_2 s^4 + m_2 c_1 s^3 + \{m_2 (k_1 + k_2) + m_1 k_2\} s^2 + c_1 k_2 s + k_1 k_2}{k_2} y_1(s) \\ & = u(s) \end{aligned} \quad (5)$$

$$y_1(s) = \frac{k_2}{m_1 m_2 s^4 + m_2 c_1 s^3 + \{m_2(k_1 + k_2) + m_1 k_2\} s^2 + c_1 k_2 s + k_1 k_2} u(s) \quad (6)$$

伝達関数は

$$\frac{k_2}{m_1 m_2 s^4 + m_2 c_1 s^3 + \{m_2(k_1 + k_2) + m_1 k_2\} s^2 + c_1 k_2 s + k_1 k_2}$$

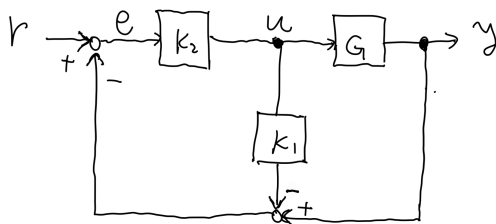
である。

解説：

(i) で求めた運動方程式を (ii) でラプラス変換します。このとき $\frac{d^2}{dt^2}$ は s^2 に、 $\frac{d}{dt}$ は s に置きかえるところが重要です。求めたいのは u から y_1 への伝達関数ですので、まずは y_2 を消去します。そして $y_1(s) = \frac{?}{?} u(s)$ の形式に変形していきます。

2 ブロック線図

2.1 ブロック線図から伝達関数を求める



r から y への伝達関数を求めよ.

(解答)

$$y = Gu$$

$$u = K_2 e$$

$$e = r - (y - K_1 u)$$

u と e を消去する.

$$\begin{aligned} y &= GK_2 e \\ &= GK_2 \{r - (y - K_1 u)\} \\ &= GK_2 r - GK_2 y + GK_2 K_1 u \\ &= GK_2 r - GK_2 y + K_2 K_1 y \end{aligned}$$

$$(1 + GK_2 - K_2 K_1) y = GK_2 r$$

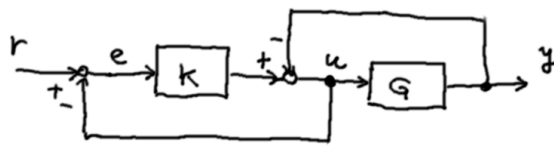
$$y = \frac{GK_2}{1 + GK_2 - K_2 K_1} r$$

伝達関数は

$$\frac{GK_2}{1 + GK_2 - K_1 K_2}$$

である.

2.2 ブロック線図から伝達関数を求める



r から y への伝達関数を求めよ.

(解答)

$$y = Gu \quad (7)$$

$$u = Ke - y \quad (8)$$

$$e = r - u \quad (9)$$

(8) 式に (9) 式を代入して e を消去する.

$$\begin{aligned} u &= K(r - u) - y \\ (1 + K)u &= Kr - y \\ u &= \frac{Kr - y}{1 + K} \end{aligned} \quad (10)$$

(7) 式に (10) 式を代入して u を消去する.

$$\begin{aligned} y &= G \frac{Kr - y}{1 + K} \\ \left(1 + \frac{G}{1 + K}\right) y &= \frac{GK}{1 + K} r \\ \left(\frac{1 + K + G}{1 + K}\right) y &= \frac{GK}{1 + K} r \\ y &= \frac{GK}{1 + K + G} r \end{aligned} \quad (11)$$

伝達関数は

$$\frac{GK}{1 + K + G}$$

である.

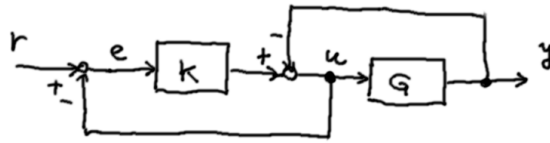
解説:

教科書 31 ページの考え方で伝達関数を求めています。 r から y への伝達関数を求めるとき、 r と y 以外の信号 (この問題の場合 u と e) は不要であるため消去しています。

このように変数を消去しながら式の変形で伝達関数を求める方法とは別に、「ブロック線図の等価変換」を用いて伝達関数を求める方法があります。 つぎのページでは等価変換で同じ問題を解いています。

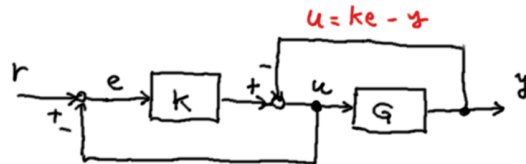
「ブロック線図の等価変換」

- (i) 加え合せ点を
入れ替えてもよい。
-
- (ii) 引き出し点を
入れ替えてもよい
-
- (iii) 入力
の加え合せ点を
出力側に移す
ときは $\boxed{G}$ を
入れる
-
- (iv) 出力
の加え合せ点を
入力側に移す
ときは $\boxed{1/G}$ を
入れる
-
- (v) 引き出し点を
入力から出力へ
移すときは $\boxed{1/G}$ を入れる
-
- (vi) 引き出し点を
出力から入力へ
移すときは $\boxed{G}$ を
入れる
-
- (vii)
-
- (viii)
-

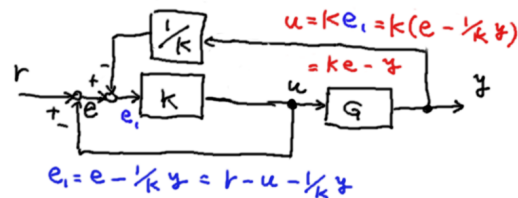


r から y への伝達関数を求めよ.

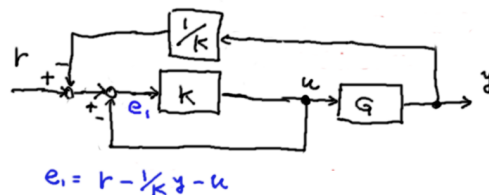
(解答)



与えられた問題の図において, u の近くの加え合わせ点が 2 つのシステム G と K の間に存在していることが伝達関数を求めにくくしています. この加え合わせ点を r の近く (図の左のほう) に移動することを考えます.

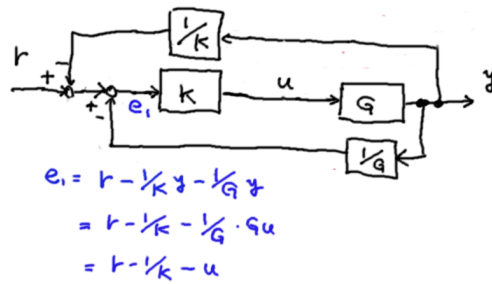


8 ページの変換則 (iii) にしたがって出力側の加え合わせ点を入力側に移しました. $1/K$ を挿入しています. 赤い文字と青い文字で書いてあるのはメモなので, 書かなくても構いません. e はもともと $r - y$ で定義されていたので, K への入力は新たに定義された e_1 になります.

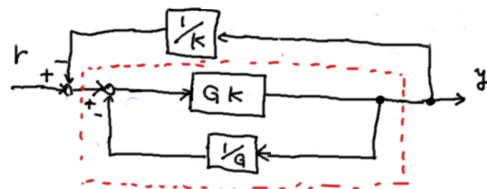


変換則 (i) にしたがって加え合わせ点を入れ替えました. $e_1 = r - 1/k \cdot y - u$ の関係は保たれています. u の引き出し点が 2 つのシステム G と K の間に存在していることが伝達関数を求めにくくして

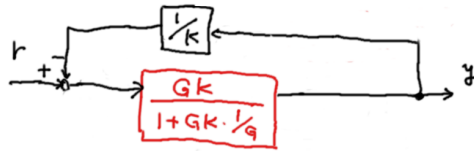
います。



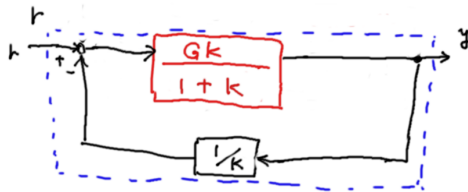
8 ページの変換則 (v) にしたがって入力側の加え合わせ点を出力側に移しました。 $1/G$ を挿入しています。 $e_1 = r - 1/k \cdot y - u$ の関係は保たれています



K と G の直列結合を GK という積にまとめました。ここで赤い点線の部分に注目します。



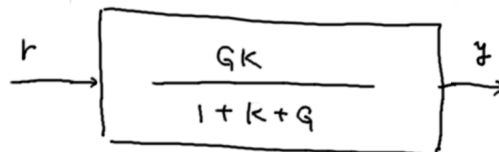
8 ページの変換則 (vii) を用いて赤い部分をまとめました。



上下を入れ替えました。



8 ページの変換則 (vii) を用いて青い部分をまとめました。



計算してまとめました。伝達関数は

$$\frac{GK}{1 + K + G}$$

となります。

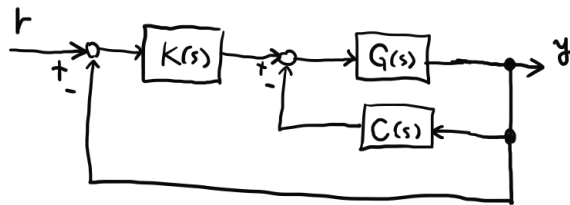
解説：

基本的な方針として、8 ページの変換則 (vii) あるいは (viii) の形を利用できるように変換則 (1)~(vi) を使ってブロック線図を変換していきます。加え合わせ点や引き出し点をできるだけ図の左端あるいは右端に移動させると変換則 (vii) あるいは (viii) を適用できるようになります。

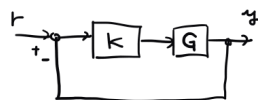
注意！！

加え合わせ点と引き出し点の入れ替えはできません。

2.3 既知の結合の利用



上の図のシステムの r から y への伝達関数を求めよ。ただし、つぎの関係を利用してよい。



r から y への伝達関数は

$$\frac{GK}{1+GK}$$



r から y への伝達関数は

$$\frac{G}{1+GK}$$

(解答)

$$\frac{\frac{G(s)}{1+G(s)C(s)}K(s)}{1 + \frac{G(s)}{1+G(s)C(s)}K(s)} = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)C(s) + G(s)K(s)}$$

解説：下の2つのような既知の結合を利用すると伝達関数を簡単に求められます。

教科書関連ページ： 31, 32

3 ステップ応答

3.1 ステップ応答の計算 (1)

伝達関数が

$$G(s) = \frac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)}$$

であるシステムのステップ応答 $y(t)$ を求めよ。

(解答)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[G(s) \frac{1}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3s + 4}{s(s + 1)(s + 2)} \right] \quad (12)$$

$$\frac{3s + 4}{s(s + 1)(s + 2)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + 1} + \frac{k_3}{s + 2} \quad (13)$$

$$k_1 = \left. sy(s) \right|_{s=0} = \left. \frac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)} \right|_{s=0} = \frac{4}{2} = 2$$

$$k_2 = \left. (s + 1)y(s) \right|_{s=-1} = \left. \frac{3s + 4}{s(s + 2)} \right|_{s=-1} = -1$$

$$k_3 = \left. (s + 2)y(s) \right|_{s=-2} = \left. \frac{3s + 4}{s(s + 1)} \right|_{s=-2} = -1$$

(12) 式と (13) 式より

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s} + \frac{-1}{s + 1} + \frac{-1}{s + 2} \right] \\ &= 2 - e^{-t} - e^{-2t} \end{aligned}$$

解説：

教科書 37 ページの (5.10) 式を用いてステップ応答を計算する問題です。(13) 式では部分分数展開を用いてラプラス逆変換しやすい形式に変形しています。ここに現れる分子の係数 k_1, k_2, k_3 の求め方として、分数を通分して両辺を比較する方法もありますが、上記の方法のほうが簡単です。

ステップ応答 $y(t)$ が

$$y(t) = 2 - e^{-t} - e^{-2t}$$

であるシステムの伝達関数 $G(s)$ を求めよ。

(解答)

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ &= \frac{2(s+1)(s+2) - s(s+2) - s(s+1)}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{2s^2 + 6s + 4 - s^2 - 2s - s^2 - s}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{1}{s} \end{aligned}$$

ステップ応答のラプラス変換は

$$y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

と表されるので

$$G(s) = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)}$$

である。

解説：

u がステップ入力の場合、

$$y(s) = G(s)u(s) = G(s)\frac{1}{s}$$

なので

$$G(s) = sy(s) = s \left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right)$$

からも求められます。

3.2 ステップ応答の計算 (2)

伝達関数が

$$G(s) = \frac{4}{2s+3}$$

であるシステムのステップ応答 $y(t)$ を求めよ。

(解答)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[G(s) \frac{1}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{4}{(2s+3)s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{(s+3/2)s} \right] \quad (14)$$

$$y(s) = \frac{2}{(s+3/2)s} = \frac{k_1}{s+3/2} + \frac{k_2}{s} \quad (15)$$

$$k_1 = (s+3/2)y(s) \Big|_{s=-3/2} = \frac{2}{s} \Big|_{s=-3/2} = -\frac{4}{3}$$

$$k_2 = sy(s) \Big|_{s=0} = \frac{2}{s+3/2} \Big|_{s=0} = \frac{4}{3}$$

(14) 式と (15) 式より

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-\frac{4}{3}}{s+3/2} + \frac{\frac{4}{3}}{s} \right] \\ &= -\frac{4}{3}e^{-\frac{3}{2}T} + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

解説：

分母が $2s+3$ の形式になっています。伝達関数の分子分母を 2 で割って分母を $\frac{2}{s+3/2}$ とした理由は、ラプラス逆変換の公式 $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+a} \right] = e^{-at}$ を利用するためです。

3.3 ステップ応答の計算 (3)

伝達関数が

$$G(s) = \frac{7s + 8}{(s + 2)^2}$$

であるシステムのステップ応答 $y(t)$ を求めよ.

(解答)

後日掲載.

解説:

分母に 2 乗がある場合, ラプラス逆変換に少し手間がかかります.

伝達関数が

$$G(s) = \frac{20}{(s+2)(s^2+3s+5)} + \frac{2}{(s^2+s+2)(s^2+3s+1)}$$

で表されるシステムのステップ応答を $y(t)$ とする． $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ の値を求めよ（簡単な計算で求められます）．

（解答）

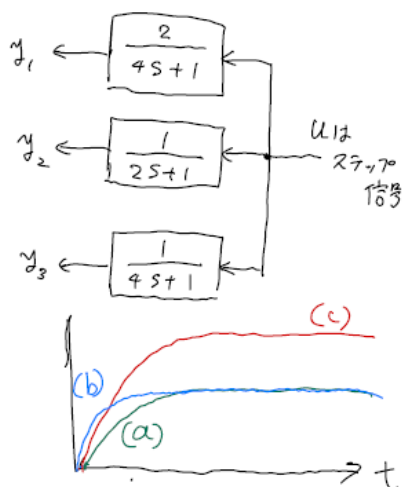
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = G(0) = \frac{20}{2 \cdot 5} + \frac{2}{2 \cdot 1} = 3$$

解説：

安定なシステムのステップ応答の最終値は $G(0)$ で求められます．

教科書関連ページ： 39 ページ．

3.4 1次系のステップ応答



$y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ はそれぞれ
(a), (b), (c) のどれに該当するか?

(解答)

1次系の伝達関数

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1}$$

と比較して、それぞれシステムのゲイン K と時定数 T の値を見る。

1番上のシステムはゲインが2であり3つのシステムの中で最も大きい。したがって y_1 は (c) に該当する。

中央と1番下のシステムを比較すると時定数に2と4の違いがある。中央のほうが時定数が小さいので、 y_2 は (b) に該当し、 y_3 は (a) に該当する。

解説：

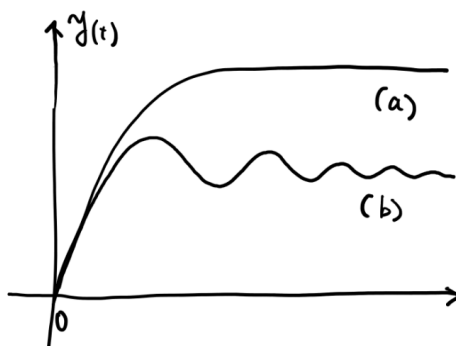
教科書 41 ページに 1 次系 $\frac{K}{Ts+1}$ のゲインと時定数を変えた場合の応答の違いが説明されています。この知識があればすぐに解答できます。

この問題では分母がすべて $as+1$ の形式になっています。これがもしも $as+2$ のような場合には、伝達関数の分子分母を2で割って分母を $\frac{a}{2}s+1$ として $\frac{a}{2}$ を時定数 T と見なさなければなりません。別の問題を解くときに注意してください。

3.5 2次系のステップ応答

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 10}$$

のステップ応答は下図の (a)、(b) のどちらか。



(解答)

分母の2次多項式を0とおいた2次方程式の判別式は

$$2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 4 - 40 = -36$$

であり、負の値である。このとき減衰係数は1より小さく、ステップ応答には振動成分が含まれる。したがって (b) である。

(別解)

教科書の2次系の伝達関数

$$G(s) = \frac{K\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

の形式に与えられた伝達関数を変形すると

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 10} = \frac{1}{s^2 + 2s + (\sqrt{10})^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{10}}\sqrt{10}}{s^2 + 2\frac{1}{\sqrt{10}}\sqrt{10}s + (\sqrt{10})^2}$$

となるので、

$$K = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \omega_n = \sqrt{10}$$

である。減衰係数が

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{10}} < 1$$

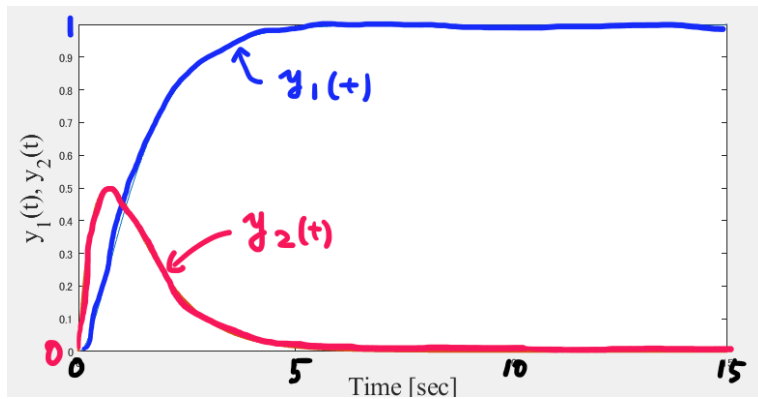
なので、ステップ応答には振動成分が含まれる。したがって (b) である。

解説：

教科書 42 ページの2次系に関する問題です。ステップ応答が振動的になるかどうかは減衰係数 ζ の大きさに決まります。問題の解法として、減衰係数を直接求めたのが上記の別解です。それよりも簡単な方法として、極が複素数か実数かを調べる、すなわち2次方程式の判別式が負か正かを調べる方法があります。判別式が負であれば極が複素数となり、減衰係数が1より小さくなるのが教科書 42 ページに書かれています。

3.6 応答の重ね合わせ，不安定零点

- (i) 伝達関数が $G_1(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$ であるシステムのステップ応答 $y_1(t)$ を求めよ.
- (ii) 伝達関数が $G_2(s) = \frac{2s}{(s+1)(s+2)}$ であるシステムのステップ応答 $y_2(t)$ を求めよ.
- (iii) 伝達関数が $G(s) = \frac{2(1-s)}{(s+1)(s+2)}$ であるシステムのステップ応答 $y(t)$ を求めよ.
- (iv) 上の (i) の $y_1(t)$ ，および (ii) の $y_2(t)$ のグラフはつぎのようになる．(iii) の $y(t)$ のグラフの概形を描け．



4 システムの安定性

4.1 システムの安定判別

つぎの伝達関数で表されるシステムは安定か不安定か判別せよ。

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \frac{1}{(s+1)(s+3)}, & \text{(ii)} \quad \frac{1}{s^2-5s+8} \\ \text{(iii)} \quad \frac{s-4}{(s+1)(s+2)} & \text{(iv)} \quad \frac{s+1}{(s+3)(s^2-4s+13)} \end{array}$$

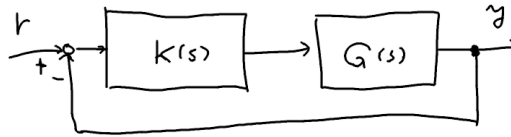
(解答)

- (i) 極は -1 と -3 であり、すべて負なので安定。
(ii) 極は $\frac{5+\sqrt{7}j}{2}$ と $\frac{5-\sqrt{7}j}{2}$ であり、実部が正なので不安定。
(iii) 極は -1 と -2 であり、すべて負なので安定。
(iv) 極は $-3, 2+3j, 2-3j$ であり、実部が正の極があるので不安定。

解説：

伝達関数の分母を見ればシステムが安定かどうか判別できます。分母多項式を 0 とおいた方程式の解は極となりますので、分母が n 次式であれば n 個の極が存在します（重複する値がある場合はそれぞれ別のものとしてカウントします）。2 次以上ならば極は複数個あり、それらのすべての値を考えます。すべての極の実部が負であることがシステムが安定であることの必要十分条件となります。なぜそうなるかの理解もしておいてください。教科書の 50,51 ページに書かれています。

つぎの図のような、 r を入力、 y を出力とするシステムは安定か不安定か判別せよ。



ただし、

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}, \quad K(s) = -8$$

とする。

(解答)

r から y までの伝達関数は

$$\frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}$$

であり、与えられた伝達関数を代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{(s+1)(s+3)} \cdot (-8)}{1 + \frac{1}{(s+1)(s+3)} \cdot (-8)} \\ &= \frac{-8}{(s+1)(s+3) - 8} \\ &= \frac{-8}{s^2 + 4s - 5} \\ &= \frac{-8}{(s-1)(s+5)} \end{aligned} \tag{16}$$

極は 1 と -5 であり、正の極があるのでシステムは不安定である。

解説：

「問題文に r を入力、 y を出力とするシステム」と書かれていますので、まずは r から y への伝達関数を求めます。その求め方は教科書の 31 ページに書かれていますが、解答に書く必要はありません。図のフィードバック系のブロック線図に対応する $\frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)}$ という伝達関数は、制御工学においては公式のように用いられますので覚えておきましょう。システムの安定性は伝達関数の分母で調べられます。2 つの極のうち 1 つでも正のものがあれば不安定です。

制御対象が $\frac{1}{(s+1)(s+3)}$ で安定であっても、下手なフィードバックをするとシステム全体が不安定になってしまう例です。

4.2 ラウスの方法

つぎの伝達関数で表されるシステムは安定か不安定か，ラウスの方法を用いて判別せよ．

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \quad \frac{1}{s^2 + 5s + 2}, \quad \text{(ii)} \quad \frac{1}{s^2 - 5s + 2} \\ & \text{(iii)} \quad \frac{1}{s^4 + 2s^2 + 7s + 2}, \quad \text{(iv)} \quad \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 9s + 20} \\ & \text{(v)} \quad \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 1} \end{aligned}$$

(解答)

- (i) 分母多項式は 2 次式であり，係数はすべて正なので安定である．
 (ii) s の係数が -5 であり，負の係数があるので不安定である．
 (iii) s^3 の係数が 0 であり，0 の係数があるので不安定である．
 (iv) 分母多項式の係数は全て正であり，3 次式なのでラウス表を作って調べる．

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 9 & \\ 2 & 20 & \end{array} \quad \left(\begin{array}{c|cc} -\frac{1}{2} & 1 & 9 \\ \hline 2 & 20 & \end{array} \right) \\ \begin{array}{cc|c} -1 & & \\ 20 & & \end{array} & \begin{array}{l} = -\frac{1}{2}(20 - 18) \\ = -1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|cc} -\frac{1}{-1} & 2 & 20 \\ \hline -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \\ = 20 \end{array}$$

最も左の列に負の数 (-1) が含まれているので不安定である．

- (v) 分母多項式の係数は全て正であり，4 次式なのでラウス表を作って調べる．

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & \\ 2 & 4 & \end{array} \quad \left(\begin{array}{c|cc} -\frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 & \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c|cc} -\frac{1}{4} & 3 & 1 \\ \hline -1 & 4 & 0 \end{array} \right) \\ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ 2 & & \\ 1 & & \end{array} & \begin{array}{l} = -\frac{1}{2}(4 - 6) \\ = 1 \end{array} & \begin{array}{l} = -\frac{1}{4}(0 - 4) \\ = 1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|cc} -\frac{1}{-1} & 2 & 4 \\ \hline -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c|cc} -\frac{1}{-2} & 1 & 1 \\ \hline -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \\ \begin{array}{cc|c} 2 & & \\ 2 & & \end{array} & \begin{array}{l} = -(2 - 4) \\ = 2 \end{array} & \begin{array}{l} = -\frac{1}{-2}(-2) \\ = 1 \end{array} \end{array}$$

最も左の列は 1, 2, 1, 2, 1 ですべて正なので安定である。

解説：

2 次式にラウスの方法を用いる場合はとても簡単です。係数がすべて正なら安定，そうでなければ不安定です。

(i) と (ii) は 2 次式なので，この方法ですぐに答えられます。

0 あるいは負の係数が存在する場合は，ラウス表をつくる必要はなく，係数を見た段階で不安定と判定できます。

(iii) は一見すると係数がすべて正のように見えますが，実は違います。 s^3 の係数が 0 であり，正ではないので不安定です。

このように 2 次の場合，あるいは 3 次以上でも係数に 0 あるいは負の係数が存在する場合は簡単に判別できます。しかし，3 次以上かつ係数がすべて正の場合はすぐに安定と結論づけてはいけません。

(iv) と (v) では係数がすべて正であることを確認したら，つぎはラウス表をつくる手順に進みます。(iv) の場合はラウス表から不安定，(v) の場合は安定と判定されます。

つぎの伝達関数で表されるシステムは安定か不安定か，ラウスの方法を用いて判別せよ．

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + 5s + 6}$$

(解答)

係数はすべて正である．ラウス表をつくる．

第 1 行	1	5
第 2 行	1	6
第 3 行	-1	0
第 4 行	6	·

一番左の列に負の数 -1 があるので，システムは不安定である．

解説：

必要最小限に書いた解答です．最初に「係数はすべて正」と書いたほうが良いです．

4.3 フルビッツの方法

つぎの伝達関数で表されるシステムは安定か不安定か，フルビッツの方法を用いて判別せよ。

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + 5s + 6}$$

(解答)

フルビッツ行列は

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

である.

$$H_1 = 1 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -6 < 0$$

すべて正ではないのでシステムは不安定である.

解説:

フルビッツの方法

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \quad (3\text{次の場合})$$

フルビッツ行列 $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$

$$H_1 = a_2 \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}, \quad H_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

$H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0$ のときシステムは安定

つぎのシステムは安定か（計算しなくてもわかるので答えだけいいです）.

(1)

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s^2+5s+3)} - \frac{3}{s+4}$$

(2)

$$G(s) = \frac{s+1}{(s^3-s^2+5s+3)} + \frac{3}{s+4}$$

(解答)

(1) 安定, (2) 不安定

解説:

(1) 分数を通分したときの分母は $(s+2)(s^2+5s+3)(s+4)$ であり, 安定な多項式の積になります. s^2+5s+3 も安定な多項式であることは教科書の 54 ページからわかります. 係数がすべて正なので 2 次方程式を解くまでもなく安定とわかります.

(2) 分数を通分したときの分母は $(s^3-s^2+5s+3)(s+4)$ であり, (s^3-s^2+5s+3) は負の係数を含む不安定な多項式なのでシステムは不安定になります.

5 周波数応答

5.1 応答の計算

伝達関数が

$$G(s) = \frac{8}{s+2}$$

と表されるシステムに入力信号

$$u(t) = 3 \sin 2t$$

を与えると、十分な時間が経過したとき出力 $y(t)$ はどのような式で表されるか。

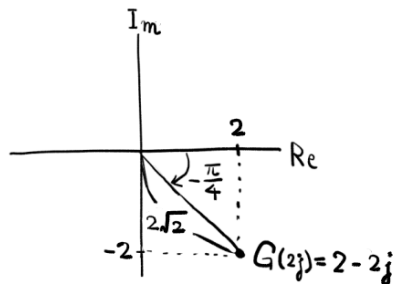
(解答)

周波数応答関数は $s = j\omega$ を代入して

$$G(j\omega) = \frac{8}{j\omega + 2}$$

である。入力信号の角周波数は 2 なので、上式を用いて $\omega = 2$ におけるゲインと位相を求める。

$$G(2j) = \frac{8}{2j+2} = \frac{4}{j+1} = \frac{4(-j+1)}{(j+1)(-j+1)} = \frac{4-4j}{1+1} = 2-2j$$



$$|G(2j)| = 2\sqrt{2}, \quad \angle G(2j) = -\frac{\pi}{4}$$

である。これらより

$$y(t) = 3 \cdot 2\sqrt{2} \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = 6\sqrt{2} \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$$

解説：

教科書 61 ページの (7.13) 式を用います。ゲイン $|G(j\omega)|$ と位相 $\angle G(j\omega)$ の具体的な値が分かれば $y(t)$ の式が書けます。 ω の値は入力 $u(t)$ の中で t の係数として掛かっている 2 になります。

5.2 応答から伝達関数を求める (1)

伝達関数が

$$G(s) = \frac{a}{s^2 + s + b}$$

と表されるシステムがある。ただし、 a, b は実数である。このシステムに入力信号

$$u(t) = \sin 2t$$

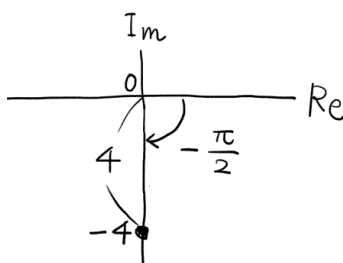
を与えると、十分な時間が経過したときの出力 $y(t)$ が

$$y(t) = 4 \sin \left(2t - \frac{\pi}{2} \right)$$

となる。 a, b の値を求めよ。

(解答)

$$|G(2j)| = 4, \quad \angle G(2j) = -\frac{\pi}{2}$$



$$G(2j) = -4j \tag{17}$$

問題文の $G(s) = \frac{a}{s^2 + s + b}$ より

$$G(2j) = \frac{a}{-4 + 2j + b}$$

これが (17) 式に一致することから

$$-4j = \frac{a}{-4 + 2j + b}$$

$$a = -4j(-4 + 2j + b) = 16j + 8 - 4bj = 8 + (16 - 4b)j$$

両辺を比較して

$$a = 8, \quad 16 - 4b = 0$$

これより

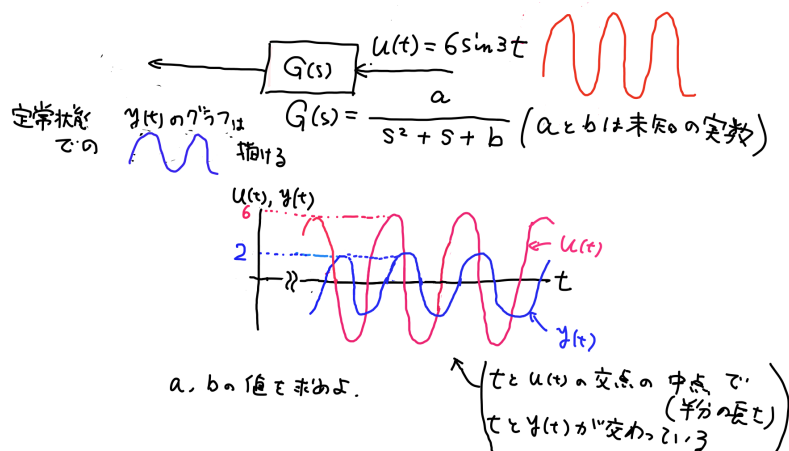
$$a = 8, \quad b = 4$$

解説：

入力信号と出力信号を比較します。このとき出力 $y(t)$ には教科書 61 ページの (7.13) 式を適用し、システムのゲインと位相の値を探ることを考えます。こうして $\omega = 2$ のときのゲイン $|G(2j)|$ と位相 $\angle G(2j)$ の値が分かります。これらは $G(2j)$ の原点からの距離と x 軸を基準として角度を表しますので、複素平面での $G(2j)$ が点とし

て定まり、 $G(2j)$ の値が決まります。一方、問題文に書かれている $G(s)$ の式から $G(2j)$ の値も定まります。これら 2 つの $G(2j)$ の値を等式として結び付けると a, b の値が求められます。

5.3 応答から伝達関数を求める (2)



(解答)

$\omega = 3$ に対する $G(j\omega)$ について考える。 y の振幅が u の振幅の $\frac{1}{3}$ になっていることから

$$|G(3j)| = \frac{1}{3}$$

である。また位相が 90° (一周期の $1/4$) 遅れていることから

$$\angle G(3j) = -\frac{\pi}{2}$$

である。これらより

$$G(3j) = -\frac{1}{3}j \quad (18)$$

である。問題文における伝達関数 $G(s)$ から

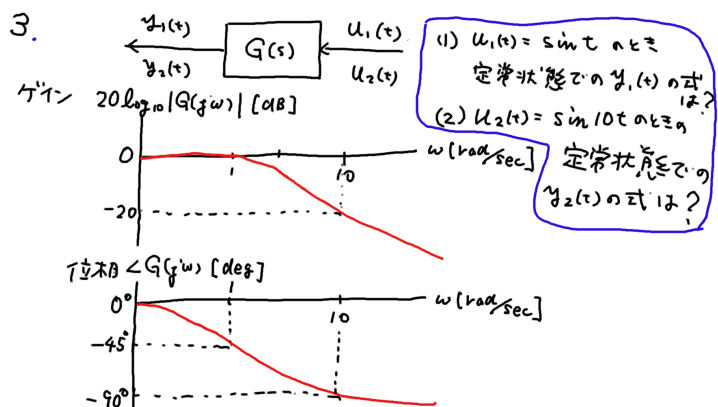
$$G(3j) = \frac{a}{(3j)^2 + 3j + b} \quad (19)$$

である。(18) 式と (19) 式から

$$-\frac{1}{3}j = \frac{a}{(3j)^2 + 3j + b}$$

が成り立つ。これを満たす a, b を求めると

$$a = 1, \quad b = 9$$



(1)

$\omega = 1$ のとき、ゲインが 0 [dB] なので $|G(j)| = 1$ 、位相は $\angle G(j) = -45^\circ = -\frac{\pi}{4}$ である。

$$\begin{aligned} y_1(t) &= |G(j)| \sin(t + \angle G(j)) \\ &= \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

(2)

$\omega = 10$ のとき、ゲインが -20 [dB] なので $|G(10j)| = 0.1$ 、位相は $\angle G(10j) = -90^\circ = -\frac{\pi}{2}$ である。

$$\begin{aligned} y_2(t) &= |G(10j)| \sin(10t + \angle G(10j)) \\ &= 0.1 \sin\left(10t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

解説：

教科書 61 ページの (7.13) 式を用います。正弦波の入力に加えられたときの出力にはこの式が適用できます。(1) の入力信号から ω の値が 1 であること、(2) では入力信号から ω の値が 10 であることに注目します。

ボード線図からゲインの値を読み取るときは、単位が [dB] であることに注意が必要です。0 [dB] は 1 であり、-20 [dB] は 0.1 です。 $20 \log_{10} |G(j\omega)|$ がデシベルの値です。 $20 \log_{10} 1 = 0$, $20 \log_{10} \frac{1}{10} = -20$ が成り立ちます。

伝達関数

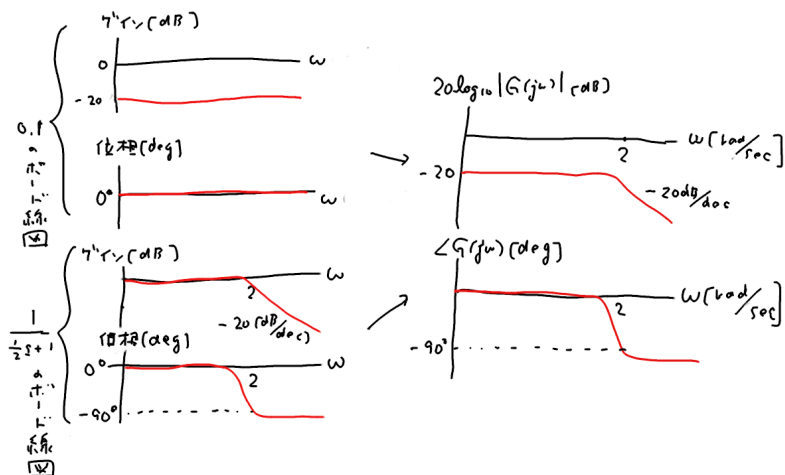
$$G(s) = \frac{0.2}{s+2}$$

とする。 $G(s)$ のボード線図の概形を描け。

(解答)

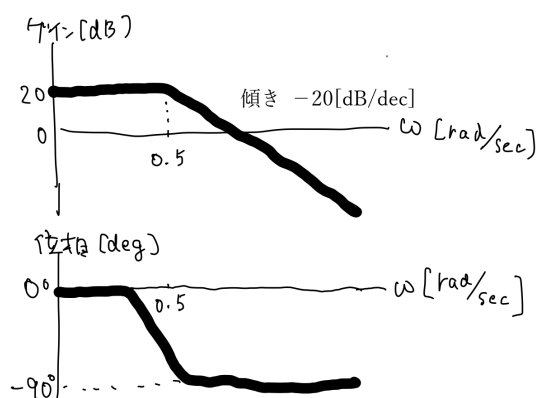
$$G(s) = \frac{0.2}{s+2} = \frac{0.2/2}{\frac{1}{2}s+1} = 0.1 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}s+1}$$

0.1 のボード線図と $\frac{1}{\frac{1}{2}s+1}$ のボード線図の和として下図のようになる。



解説：

伝達関数が与えられてボード線図を描くときは、簡単な（ボード線図が描ける）伝達関数の積に分解することから始めます。それぞれのボード線図の概形の和をとることによって求めるべきボード線図が得られます。伝達関数の積に対してボード線図が和になる理由、分解したときのそれぞれのボード線図の概形は教科書を参照してください。



ボード線図の折れ線近似が上の図であるような伝達関数 $G(s)$ を求めよ。

(解答)

$\omega = 0.5[\text{rad/sec}]$ で折れ曲がり、位相が -90° まで下がることから、一次系と定数の積である。折れ曲がる角周波数が $\omega = 0.5[\text{rad/sec}]$ であることから、一次系として

$$\frac{1}{2s + 1}$$

が含まれる。また低周波域でのゲインが $20[\text{dB}]$ であることから、定数として

$$10$$

が含まれる。よって

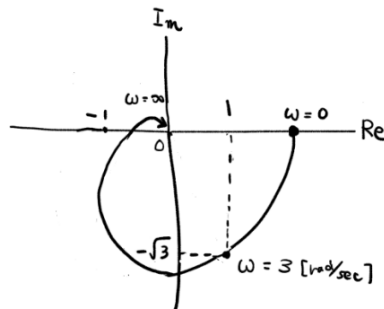
$$G(s) = \frac{10}{2s + 1}$$

である。

解説：

前問の逆をたどるような考え方で答えを出します。ボード線図が折れ曲がっているところの ω の値を読み取るなど、手がかりとなる情報をできるだけ利用してください。

ベクトル軌跡が下図のようなシステムに入力 $u(t) = \sin 3t$ を加えたとき、定常状態での出力 $y(t)$ はどのような式で表されるか。



(解答)

$\omega = 3$ のときのベクトル軌跡上の点は $G(3j)$ を表す。図より

$$|G(3j)| = 2, \quad \angle G(3j) = -60^\circ = -\frac{\pi}{3}$$

である。入力が $u(t) = \sin 3t$ のときの定常状態の出力は

$$y(t) = |G(3j)| \sin(3t + \angle G(3j))$$

であるので

$$y(t) = 2 \sin\left(3t - \frac{\pi}{3}\right)$$

である。

解説：

ベクトル軌跡は $G(j\omega)$ の ω の値を 0 から ∞ まで変えたときの軌跡ですので、 $\omega = 3$ と書かれた点は複素数 $G(3j)$ を表します。この点の原点からの距離 $|G(3j)|$ と偏角 $\angle G(3j)$ を図から読み取ります。それらを教科書 61 ページの (7.13) 式に代入します。

伝達関数

$$L(s) = \frac{8}{(s+2)^3}$$

について考える.

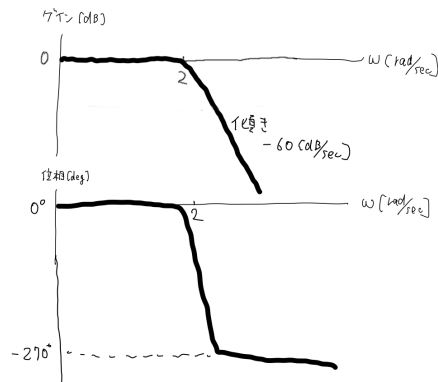
- (1) $L(s)$ のボード線図の概形を折れ線近似で描け.
- (2) $L(s)$ のベクトル軌跡の概形を描け.

(解答)

(1)

$$\begin{aligned} L(s) &= \frac{8}{(s+2)^3} \\ &= 8 \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s+2} \\ &= 8 \cdot \frac{1/2}{\frac{1}{2}s+1} \cdot \frac{1/2}{\frac{1}{2}s+1} \cdot \frac{1/2}{\frac{1}{2}s+1} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}s+1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}s+1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}s+1} \end{aligned}$$

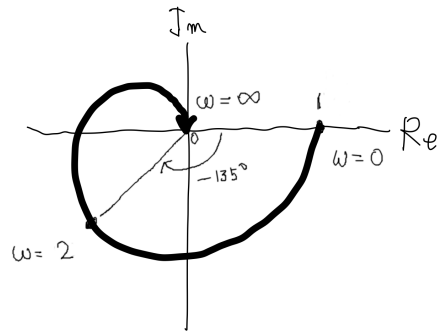
と変形することによって, 一次系の $\frac{1}{\frac{1}{2}s+1}$ のボード線図の 3 つの和として描く.



(2) ベクトル軌跡の始点, すなわち $\omega = 0$ のときの点を考えると

$$G(j0) = G(0) = \frac{8}{(0+2)^3} = 1$$

であるので, 実軸上の 1 から軌跡が始まる. ゲインが減少し, $\omega = 2$ のとき位相が -135° であること, $\omega = \infty$ のとき位相が -270° まで下がることから下図のようになる.

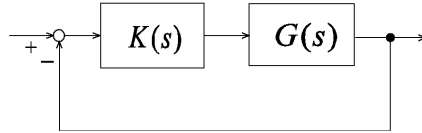


解説：

3 次の伝達関数ですが，3 つの 1 次系に分解します．分母が $s+2$ なので $\frac{1}{2}s+1$ の形にするため，それぞれの伝達関数の分子分母を 2 で割っています．1 次系の位相は -90° まで位相が下がりますので，それらが 3 つになると位相は -270° まで下がります．ゲインに関してはボード線図から $\omega=2$ を過ぎたところからゲインが小さくなっていくことがわかりますので，ベクトル軌跡では $\omega=2$ まではほぼ半径 1 で，そこからはだんだんと原点に近づくように書きました．

6 フィードバックシステムの安定性

6.1 極を配置する問題



上の図の制御系で

$$G(s) = \frac{3}{s+2}, \quad K(s) = \frac{d}{s+c}$$

とする。ただし、 c, d は実数である。

- (1) この制御系の閉ループ伝達関数を求めよ。
- (2) 閉ループ伝達関数の極が $-3, -5$ となるような c, d の値を求めよ。

(解答)

(1)

$$\begin{aligned} \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} &= \frac{\frac{3}{s+2} \cdot \frac{d}{s+c}}{1 + \frac{3}{s+2} \cdot \frac{d}{s+c}} \\ &= \frac{3d}{(s+2)(s+c) + 3d} \\ &= \frac{3d}{s^2 + (2+c)s + 2c + 3d} \end{aligned}$$

(2)

$$s^2 + (2+c)s + 2c + 3d = (s+3)(s+5)$$

となればよい。これより

$$2+c = 3+5, \quad 2c+3d = 3 \cdot 5$$

これらを満たす c, d は

$$c = 6, \quad d = 1$$

解説：

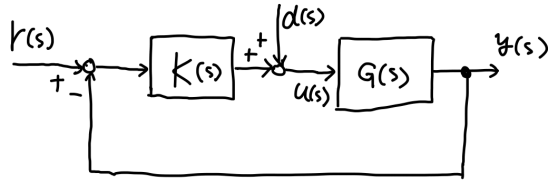
閉ループ伝達関数といえば、問題にある図で言えば最も左にある信号から最も右にある信号までの伝達関数です。これは教科書 31 ページで $G(s)$ と $K(s)$ を用いた式として求められていますので、これを公式のように使います。

極とは伝達関数の分母を 0 とおいた方程式の解です。それが -3 と -5 になるということは、分母が $(s+3)(s+5)$ と因数分解できることを意味します。

あるいは、 $s^2 + (2+c)s + 2c + 3d$ に $s = -3$ を代入すると 0 になり、 $s = -5$ を代入すると 0 になることから c, d に関する連立方程式を導出する方法もあります。

$s^2 + (2+c)s + 2c + 3d = 0$ という 2 次方程式を解の公式で解いても答えが得られますが、計算が少々面倒になります。

6.2 外乱に対する考察



(i) r, d と y の関係を

$$y(s) = G_{ry}(s)r(s) + G_{dy}(s)d(s)$$

と表すとき, $G_{dy}(s)$ を $G(s), K(s)$ を求めよ.

(ii)

$$G(s) = \frac{s+2}{s-5}, K(s) = \frac{s-5}{s+1}$$

のとき, $G_{ry}(s), G_{dy}(s)$ を求めよ.

(解答)

(i)

$G_{dy}(s)$ は d から y への伝達関数である. $r = 0$ として d から y への伝達関数を求める. $y = Gu$ に $u = d + Ke = d + K(r - y) = d - Ky$ を代入すると

$$y = G(d - Ky) = Gd - GK y$$

$$(1 + GK)y = Gd$$

$$y = \frac{G}{1 + GK}d$$

よって

$$G_{dy}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)}$$

(2)

$G_{ry}(s)$ は r から y への伝達関数であり, $d = 0$ として求めると,

$$G_{ry}(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}$$

となる (教科書 31 ページ参照).

$$G_{ry}(s) = \frac{\frac{s+2}{s-5} \cdot \frac{s-5}{s+1}}{1 + \frac{s+2}{s-5} \cdot \frac{s-5}{s+1}} = \cdots = \frac{s+2}{2s+3}$$

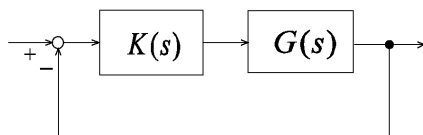
$$G_{dy}(s) = \frac{\frac{s+2}{s-5}}{1 + \frac{s+2}{s-5} \cdot \frac{s-5}{s+1}} = \cdots = \frac{s^2 + 3s + 2}{2s^2 - 7s - 15}$$

解説:

外から 2 つの入力 r と d が入る場合、 y に対する伝達関数を求めるときにはそれぞれ独立と見なして、注目する入力以外は 0 として考えます。

この問題は教科書 82,83 ページと同じ状況を考えています。制御対象とコントローラの間には不安定極零消去が生じるとフィードバック系は不安定になります。 $G_{ry}(s)$ は安定な伝達関数ですが、外乱 d の影響を表す $G_{dy}(s)$ が不安定なので、フィードバック系は外乱に弱くて不安定です。

6.3 フィードバック制御系の安定条件



上の図で

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 5}, \quad K(s) = \frac{k}{s}$$

とする．このフィードバック制御系が安定となるような実数 k の値の範囲を不等式で示せ．

(解答)

特性方程式は

$$k + s(s^2 + s + 5) = 0$$

$$s^3 + s^2 + 5s + k = 0$$

係数がすべて正である必要から

$$k > 0 \tag{20}$$

ラウス表を教科書 52 ページの (i)~(iii) の手順に従ってつくと下の表になる．

第 1 行	1	5
第 2 行	1	k
第 3 行	$5 - k$	0
第 4 行	k	.

一番左の列がすべて正であることが必要なので

$$5 - k > 0, \quad k > 0 \tag{21}$$

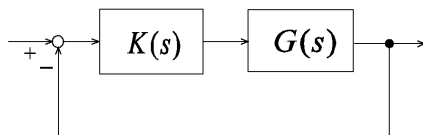
(20) 式と (21) 式より

$$0 < k < 5 \tag{22}$$

解説：

前問では「閉ループ伝達関数を求めよ」という問いがありましたが，この問題にはありません．制御系の安定性を考えるので閉ループ伝達関数を求めてもよいですが，特に指定がなければ最初から特性方程式を用いる方が簡単です．特性方程式の書き方は教科書 85 ページにあります．それがこの問題の場合 3 次方程式となりますので，ラウスの方法（教科書 53 ページ）を適用することになります．

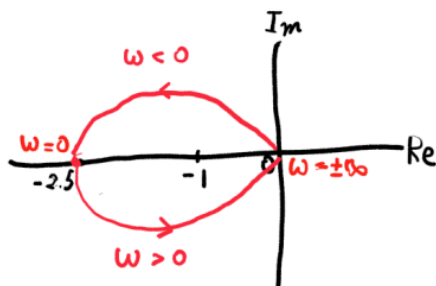
7 ナイキストの安定判別



図のフィードバック制御系において

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)(s-1)}, \quad K(s) = \frac{s-5}{s+1}$$

とする． $G(s)K(s)$ のナイキスト線図は下図のようになる．フィードバック制御系は安定かナイキストの安定判別法を用いて判別せよ．



(解答)

開ループ伝達関数は $\frac{s-5}{(s-2)(s-1)(s+1)}$ であり，不安定極の数は $P=2$ である．

ナイキスト線図は -1 の周りを反時計方向に 1 回まわっているので $R=1$ である．

$P \neq R$ なので制御系は不安定である．

解説：

ナイキストの安定判別法については教科書に他の例も載っています．回転数の数え方に注意が必要ですのでご確認ください．

95 ページの「安定条件の証明」を理解するための演習

つぎの値を求めよ。ただし $\angle z$ は複素数 z の偏角し、値はラジアン [rad] でなく度 (°) [deg] とする。

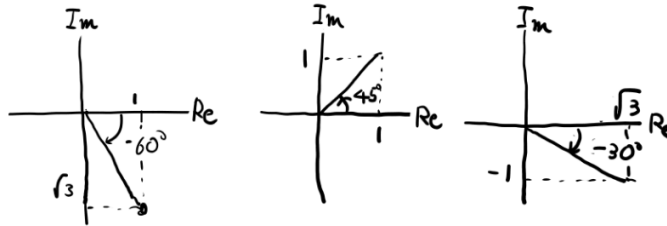
(i) $\angle(1 - \sqrt{3}j)$, $\angle(1 + j)$, $\angle(\sqrt{3} - j)$

(ii) $\angle \frac{1 - \sqrt{3}j}{(1 + j)(\sqrt{3} - j)}$

(解答)

(i)

-60° , 45° , -30°



(ii)

$$\begin{aligned} \angle \frac{1 - \sqrt{3}j}{(1 + j)(\sqrt{3} - j)} &= \angle(1 - \sqrt{3}j) - \{\angle(1 + j) + \angle(\sqrt{3} - j)\} \\ &= -60^\circ - (45^\circ - 30^\circ) = -75^\circ \end{aligned}$$

解説：

複素数 z の絶対値（大きさ）を $|z|$ ，偏角を $\angle z$ とすると

$$z = |z|e^{\angle z j}$$

と表せます。

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| \cdot |z_2| e^{(\angle z_1 + \angle z_2)j} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{(\angle z_1 - \angle z_2)j} \end{aligned} \quad (23)$$

であることから、偏角についてつぎが成り立ちます。

$$\angle z_1 z_2 = \angle z_1 + \angle z_2 \quad (24)$$

$$\angle \frac{z_1}{z_2} = \angle z_1 - \angle z_2 \quad (25)$$

複素数の積になっているところは偏角の和に、複素数の逆数になっているところは偏角の符号を反転させればよいです。

95 ページの「安定条件の証明」を理解するための演習

$$G(s) = \frac{s+4}{s-2}, \quad K(s) = \frac{2}{s+3}$$

とする.

- (i) 閉ループ伝達関数の分母と極を求めよ.
- (ii) 開ループ伝達関数の分母と極を求めよ.
- (iii) $1 + G(s)K(s)$ を計算して分子と分母を求めよ.

(解答)

(i)

$$\begin{aligned} \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} &= \frac{\frac{s+4}{s-2} \cdot \frac{2}{s+3}}{1 + \frac{s+4}{s-2} \cdot \frac{2}{s+3}} \\ &= \frac{(s+4) \cdot 2}{(s-2)(s+3) + (s+4) \cdot 2} \\ &= \frac{2s+8}{(s+1)(s+2)} \end{aligned}$$

分母は $(s+1)(s+2)$, 極は -1 と -2 .

(ii)

$$G(s)K(s) = \frac{2(s+4)}{(s-2)(s+3)}$$

分母は $(s-2)(s+3)$, 極は 2 と -3 .

(iii)

$$\begin{aligned} 1 + G(s)K(s) &= 1 + \frac{(s+4) \cdot 2}{(s-2)(s+3)} \\ &= \frac{(s-2)(s+3) + (s+4) \cdot 2}{(s-2)(s+3)} \\ &= \frac{(s+1)(s+2)}{(s-2)(s+3)} \end{aligned}$$

解説:

$1 + G(s)K(s)$ の分子と分母のそれぞれに注目してください. 分子のほうは (i) の閉ループ伝達関数の分母, 分母のほうは (ii) の開ループ伝達関数の分母になっています.

一般に

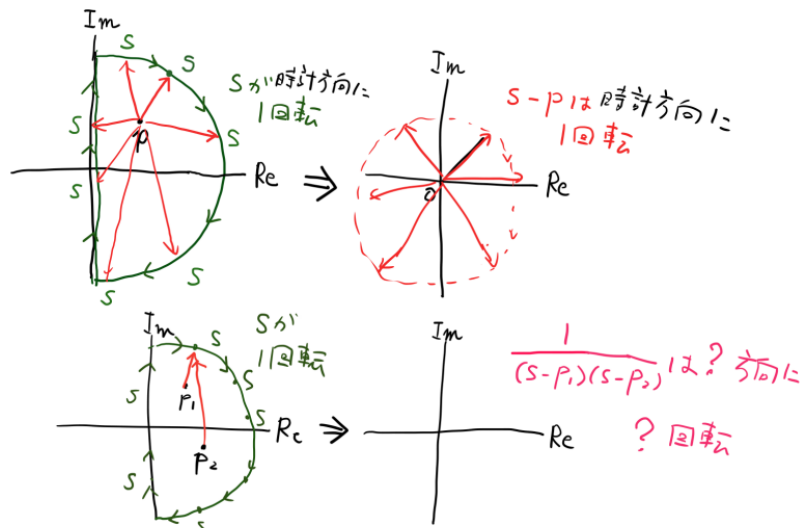
$$G(s) = \frac{n_g}{d_g}, \quad K(s) = \frac{n_k}{d_k}$$

のとき

$$\begin{aligned} 1 + G(s)K(s) &= 1 + \frac{n_g}{d_g} \frac{n_k}{d_k} \\ &= \frac{d_g d_k + n_g n_k}{d_g d_k} \end{aligned}$$

ですので, 分子には閉ループ伝達関数の分母 (特性多項式), 分母は開ループ伝達関数の分母になります.

95 ページの「安定条件の証明」を理解するための演習



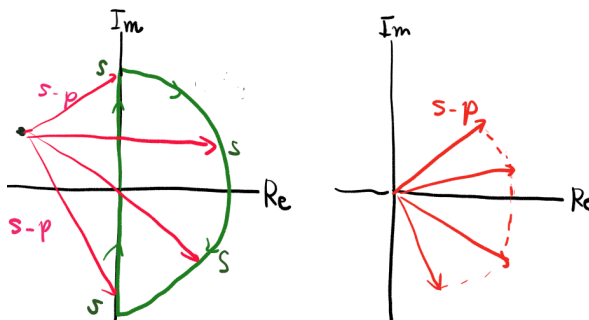
(解答)

$\angle\{(s-p_1)(s-p_2)\} = \angle(s-p_1) + \angle(s-p_2)$ なので $(s-p_1)(s-p_2)$ は原点のまわりを時計方向に 2 回転する. その逆数 $\frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)}$ は逆の方向, すなわち反時計方向に 2 回転する.

解説:

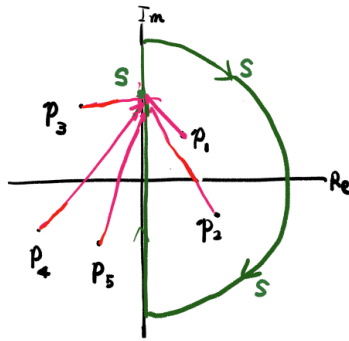
$s-p$ が原点のまわりを 1 回転するとは, $\angle(s-p)$ がある基準の角度を 0° として 360° まで変化するという事です. $(s-p_1)(s-p_2)$ の回転角を考える場合は $\angle(s-p_1) + \angle(s-p_2)$ として 2 つの角度の和が回転角となり, $360^\circ + 360^\circ$ で時計方向に 2 回転となります. $\angle\frac{1}{z} = -\angle z$ であることから回転角の符号が反転し, $\frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)}$ は時計方向に -2 回転, すなわち反時計方向に 2 回転となります.

ちなみに $s-p$ の p が虚軸よりも左にある場合は下の図のようになります.



このように $s-p$ の矢印は扇形に動きますが回転するには至らず, 回転数は 0 回です.

すると虚軸よりも左にある p は回転数に影響せず, 虚軸よりも右にある p が $s-p$ の回転数を生み出します.

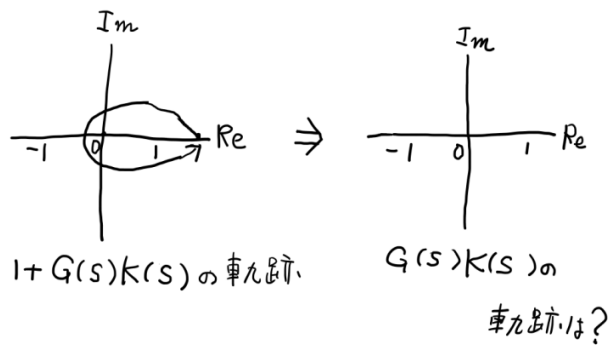


上の図のような場合，

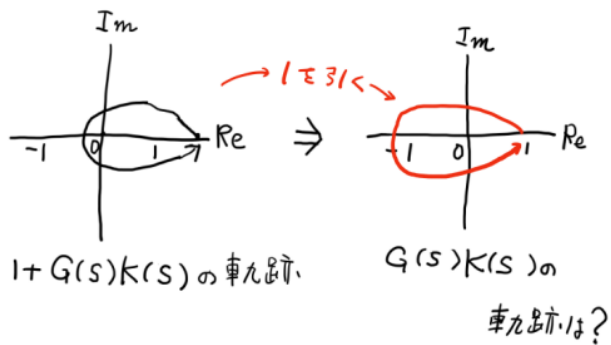
$$\frac{(s - p_3)(s - p_4)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_5)}$$

の回転を考えると虚軸より右にある p_1 と p_2 の 2 つだけが回転に関係します．それらが分母にあることを考慮に入れると反時計方向に 2 回の回転となります．

95 ページの「安定条件の証明」を理解するための演習



(解答)



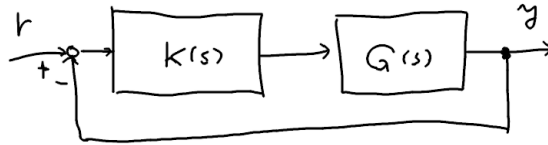
解説：

$1 + G(s)K(s)$ が原点のまわりを回ると、 $G(s)K(s)$ の -1 のまわりを回ります。

ナイキストの安定判別法では $G(s)K(s)$ の -1 のまわりの回転数を R としています。この数は $1 + G(s)K(s)$ の原点のまわりの回転数と等しいです。

8 安定余裕

8.1 ゲイン余裕 (1)



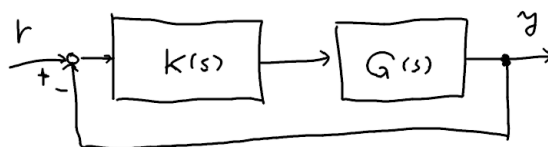
上の図の制御系で

$$G(s) = \frac{2-s}{s+2}, \quad K(s) = \frac{k}{s+1}$$

とする。ただし、 k は正の実数である。

- (i) 制御系が安定となるような実数 k の値の範囲を不等式で示せ。
- (ii) 制御系のゲイン余裕が $10[\text{dB}]$ となるような k の値を求めよ。

8.2 位相余裕 (1)



上の図の制御系で

$$G(s) = \frac{1}{s(s + \sqrt{3})}, \quad K(s) = \frac{k}{s + \sqrt{3}}$$

とする。ただし、 k は正の実数である。

- (i) 制御系が安定となるような実数 k の値の範囲を不等式で示せ。
- (ii) 制御系の位相余裕が 30° となるような k の値を求めよ。
- (iii) 上の (ii) で求めた k の値を用いる制御系のゲイン余裕を求めよ。

(解答)

(i)

特性方程式は

$$\begin{aligned} k + s(s + \sqrt{3})^2 &= 0 \\ s^3 + 2\sqrt{3}s^2 + 3s + k &= 0 \end{aligned}$$

係数がすべて正である必要から

$$k > 0 \tag{26}$$

ラウス表を教科書 52 ページの (i)~(iii) の手順に従ってつくと下の表になる。

第 1 行	1	3
第 2 行	$2\sqrt{3}$	k
第 3 行	A	0
第 4 行	k	.

ただし第 3 行の A は

$$A = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2\sqrt{3} & k \end{vmatrix} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(k - 6\sqrt{3})$$

である。一番左の列がすべて正であることが必要なので

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}(k - 6\sqrt{3}) > 0, \quad k > 0 \tag{27}$$

(26) 式と (27) 式より

$$0 < k < 6\sqrt{3} \tag{28}$$

(ii)

まず、開ループ伝達関数 $G(s)K(s)$ の位相が -150° となるような ω の値を求める。

$$\begin{aligned}\angle G(j\omega)K(j\omega) &= \angle \frac{k}{j\omega(j\omega + \sqrt{3})^2} \\ &= \angle k - \{\angle j\omega + \angle(j\omega + \sqrt{3}) + \angle(j\omega + \sqrt{3})\} \\ &= 0^\circ - \{90^\circ + 2\angle(j\omega + \sqrt{3})\}\end{aligned}\quad (29)$$

これが -150° となればよいので

$$\begin{aligned}-90^\circ - 2\angle(j\omega + \sqrt{3}) &= -150^\circ \\ 2\angle(j\omega + \sqrt{3}) &= 60^\circ\end{aligned}\quad (30)$$

ここで

$$\angle(j\omega + \sqrt{3}) = 30^\circ \quad (31)$$

とすると、

$$\omega = 1 \quad (32)$$

が求められる。

つぎに $\omega = 1$ のときのゲイン $|G(j\omega)K(j\omega)|$ が 1 となるような k の値を求める。

$$|G(j)K(j)| = \left| \frac{k}{j(j + \sqrt{3})^2} \right| = \frac{k}{1 \cdot 2^2} = 1 \quad (33)$$

これより

$$k = 4$$

(iii)

(29) 式が -180° となるような ω を求める。(以下、後日掲載)

(i) の解説：

ラウス表をつくる時、第 3 行の最初の数がやや複雑になります。このような場合、その数を A という新たな記号を定義して表しておきます。第 4 行を計算するとき A を用いますが、計算途中で A は消去されます。

(ii) の解説：

(i) で安定限界となる k の値を求めました。その値 $6\sqrt{3}$ よりも小さい $k = 4$ とすると位相余裕が 30° になります。

(30) 式の

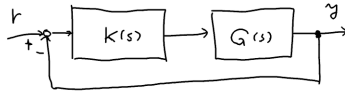
$$2\angle(j\omega + \sqrt{3}) = 60^\circ$$

から

$$\angle(j\omega + \sqrt{3}) = 30^\circ$$

としています。一般に $2\angle z = 60^\circ$ となる複素数 z は $z = 30^\circ$ のほかに $z = 210^\circ$ もあります ($2\angle z = 60 + 360^\circ$ も考えています)。しかし $z = j\omega + \sqrt{3}$ で実部が正の場合、 $\angle(j\omega + \sqrt{3})$ は 210° にはなりません。

8.3 位相余裕 (2)



上の図の制御系で

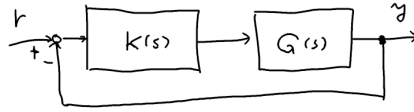
$$G(s) = \frac{1}{s+3}, \quad K(s) = \frac{k}{s(s+2)}$$

とする。ただし、 k は正の実数である。

- (i) 制御系が安定となるような k の値の範囲を不等式で示せ。
- (ii) 制御系の位相余裕が $45[\text{deg}]$ となるような k の値を求めよ。

9 定常偏差

9.1 定常位置偏差・定常速度偏差



上の図でフィードバック制御系で $G(s)$ は制御対象、 $K(s)$ はコントローラ、 r を目標信号、 y を制御される出力、偏差を $e = r - y$ とする。

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 5}, \quad K(s) = \frac{3}{s}$$

のとき、つぎの問いに答えよ。

- (i) 定常位置偏差を求めよ。
- (ii) 定常速度偏差を求めよ。

(解答)

(i)

$G(s)K(s)$ が積分器を 1 個含んでいるので定常位置偏差は 0 である。

(ii)

$G(s)K(s)$ が積分器を 1 個しか含んでいないので定常速度偏差が発生する。

$e = r - y$ とする。 r から e への伝達関数は

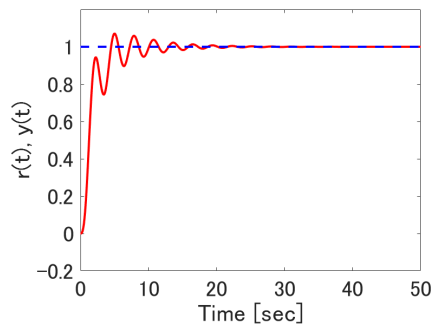
$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + G(s)K(s)} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{s^2 + s + 5} \cdot \frac{3}{s}} \\ &= \frac{s^3 + s^2 + 5s}{s^3 + s^2 + 5s + 3} \end{aligned}$$

ランプ入力 $r(s) = \frac{1}{s^2}$ を与えてラプラス変換の最終値の定理を適用する。

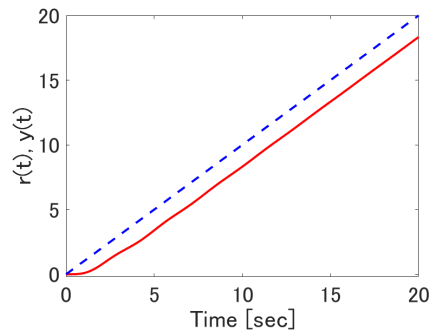
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s^3 + s^2 + 5s}{s^3 + s^2 + 5s + 3} \cdot \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + s + 5}{s^3 + s^2 + 5s + 3} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

(34)

解説： 図のフィードバック系の場合、 $G(s)K(s)$ に含まれる積分器の個数が定常位置偏差や定常速度偏差に関係します。



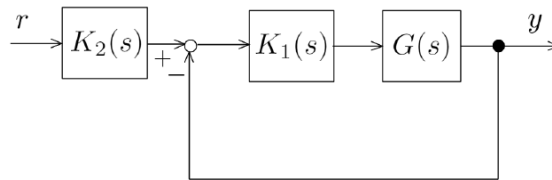
(i) で $r(t)$ がステップ信号の場合，目標値 r （青い破線）に対して制御出力 $y(t)$ （赤い実線）は定常偏差なく追従します．



(ii) で定常速度偏差を考える場合は $r(t) = t$ というランプ入力（青い破線）を考えることになります．これに対する $y(t)$ は赤い実線のようになり，定常偏差が発生します．

教科書関連ページ：定常位置偏差は 107 ページ，定常速度偏差は 108 ページ，積分器の個数と定常偏差の関係は 110 ページ．

9.2 定常偏差



上の図の制御系において,

$$G(s) = \frac{1}{s+1}, \quad K_1(s) = \frac{2}{s+2}, \quad K_2(s) = \frac{5}{s+3}$$

とする. 図中の r は目標信号, y は制御対象の出力, それらの偏差を $e = r - y$ とする. 目標信号 r がステップ信号 ($r = 1$) のとき, 定常偏差 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ の値を求めよ.

(解答)

解説:

10 制御系設計・総合問題

10.1 さまざまな入力に対する定常応答

伝達関数が $G(s)$ であるシステムに入力 $u(t)$ を加えるとき、定常状態での出力 $y(t)$ について考える。

- (i) $G(s) = \frac{8}{s+2}$, $u(t)$ がステップ信号 ($u(t) = 1$) のとき、定常状態での $y(t)$ の値を答えよ。
- (ii) $G(s) = \frac{8}{s+2}$, $u(t)$ がインパルス信号のとき、定常状態での $y(t)$ の値を答えよ。
- (iii) $u(t) = 3 \sin 2t$ を加えるとき、定常状態での出力が $y(t) = 6\sqrt{2} \sin(2t - \frac{\pi}{4})$ となるシステムがある。このシステムに $u(t) = 2 \sin(2t - \frac{\pi}{4})$ を加えるとき、定常状態での出力 $y(t)$ を表す式を答えよ。

(解答)

(i)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = G(0) = 4$$

(ii)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)u(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8}{s+2}\right] = 8e^{-2t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 8e^{-2t} = 0$$

(別の解き方)

システムが安定なので、ラプラス変換の最終値の定理を使う。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)u(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{8s}{s+2} = 0$$

(iii)

$\omega = 2$ の正弦波入力の振幅 3 に対して、出力の振幅が $6\sqrt{2}$ であることから、 $G(2j) = \frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$ である。また、位相に $\frac{\pi}{4}$ の遅れが生じることから $\angle G(2j) = -\frac{\pi}{4}$ である。入力

$$u(t) = 2 \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$$

に対しては

$$\begin{aligned} y(t) &= 2|G(2j)| \sin\left(2t - \frac{\pi}{4} + \angle G(2j)\right) \\ &= 2 \cdot 2\sqrt{2} \sin\left(2t - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 4\sqrt{2} \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

解説：

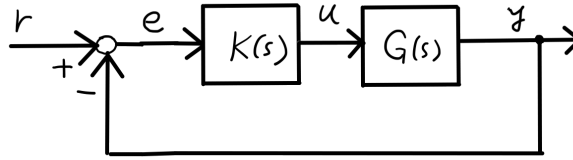
(i) ではステップ応答の最終値を使います。

(ii) ではインパルス入力のラプラス変換が 1 であることを用いています。(ii) の $y(t)$ はインパルス応答です。安定なシステムのインパルス応答は時間が経過すると 0 に収束します。

(iii) では $\omega = 2$ でのゲインと位相がわかることから答えが得られます。

教科書関連ページ： ステップ応答の最終値は 39 ページ，インパルス入力については 35 ページ，正弦波入力に対する定常状態での出力は 61 ページ。

10.2 PID 制御



(1) r から e への伝達関数を求めよ.

制御対象の伝達関数が $G(s) = \frac{2}{s+1}$ であり, 目標値を $r(t) = 1$ とする.

(2) コントローラに比例制御 $K(s) = 3$ を用いたときの定常偏差 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ を求めよ.

(3) コントローラに PID 制御 $K(s) = 3 + \frac{1}{s} + 2s$ を用いたときの定常偏差 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ を求めよ.

(解答)

(1)

$$e = r - y = r - GK e$$

$$(1 + GK)e = r$$

$$e = \frac{1}{1 + GK} r$$

r から e への伝達関数は

$$\frac{1}{1 + G(s)K(s)}$$

である.

($G(s) = \frac{2}{s+1}$ を代入して $\frac{s+1}{s+1+2K(s)}$ としてもよい)

(2)

$$\frac{1}{1 + G(s)K(s)} = \frac{1}{1 + \frac{2}{s+1} \cdot 3}$$

に $s = 0$ を代入して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{1 + \frac{2}{1} \cdot 3} = \frac{1}{7} (= 0.1429 \dots)$$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + G(s)K(s)} &= \frac{1}{1 + \frac{2}{s+1} \cdot \left(3 + \frac{1}{s} + 2s\right)} \\ &= \frac{s(s+1)}{s(s+1) + 2(3s+1+2s^2)} \\ &= \frac{s^2 + 1s}{5s^2 + 7s + 2} \end{aligned}$$

に $s = 0$ を代入して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{0}{2} = 0$$

解説：

(1) より

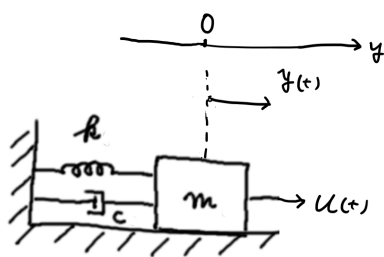
$$e(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} r(s)$$

であり, r がステップ信号 ($r(t) = 1$) なので

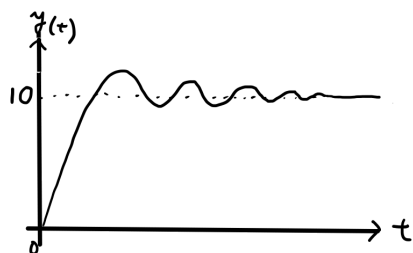
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{1 + G(0)K(0)}$$

で (2), (3) の値が求められます.

つぎの図のように質量 m の物体がばね定数 k のばねと速度に比例する抵抗力を発生するダッシュポット（速度に対する比例定数 c ）につながれている． $m = 0.4$ であり， c と k は正の値をとる未知の定数とする．物体に加える力を $u(t)$ ，ばねの自然長の位置からの変位を $y(t)$ とする．



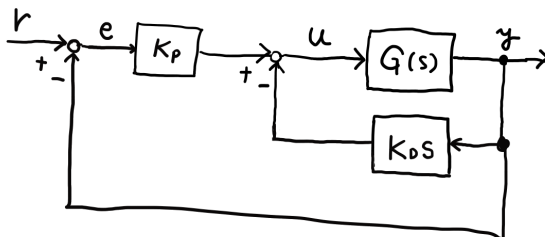
- (i) u から y への伝達関数 $G(s)$ を c, k を用いて表せ ($m = 0.4$ である)．
- (ii) ステップ入力 $u(t) = 1$ を加えたときの $y(t)$ がつぎの図のようになった．



この図からわかる k の値を書け．また，応答波形にオーバーシュートがあり振動成分が含まれていることから， c がとり得る値の範囲を不等式で書け．

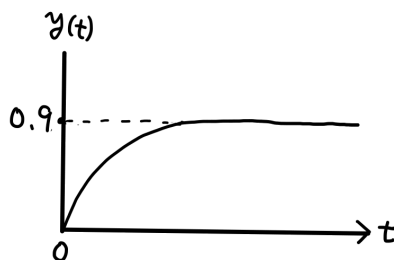
つぎのページに続く

- (iii) $G(s)$ で表される制御対象に対して図のよう制御系を設計する．ただし， K_P は正の実数であり比例要素を表す． K_D は正の実数であり $K_D s$ は微分要素を表す．



目標値 r から出力 y までの伝達関数を $G(s)$, K_P , $K_D s$ を用いて表せ．

- (iv) 目標値 r から出力 y までの伝達関数を c , K_P , K_D を用いて表せ ($m = 0.4$, k は (ii) で求めた値とする)．
- (v) 目標値を $r(t) = 1$ というステップ信号とするととき，出力 $y(t)$ がつぎの図になるように比例要素と微分要素を設計する．



K_P の値を求めよ．また，応答波形にオーバーシュートがなく振動成分が含まれないようにするために K_D がとるべき値の範囲を c を用いた不等式で書け．

(解答)

(i)

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -k y(t) - c \frac{dy(t)}{dt} + u(t)$$

両辺をラプラス変換して

$$ms^2 y(s) = -k y(s) - cs y(s) + u(s)$$

$$(ms^2 + cs + k)y(s) = u(s)$$

$$y(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} u(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1}{0.4s^2 + cs + k}$$

(ii) ステップ応答の最終値は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = G(0) = \frac{1}{k}$$

であり、これが問題文中のグラフより 10 に等しいので

$$k = 0.1 \left(= \frac{1}{10} \right)$$

である。

また、ステップ応答が振動的であることから極は複素数となる。伝達関数の分母の 2 次多項式から得られる判別式は負であるので、

$$c^2 - 4mk = c^2 - 4 \cdot 0.4 \cdot 0.1 < 0$$

$$c^2 < 4 \cdot 0.4 \cdot 0.1 = 0.16$$

$$0 < c < 0.4$$

あるいは、問題文に「 c は「正の値をとる」と書かれているので

$$c < 0.4 \left(= \frac{2}{5} \right)$$

でもよい。

(iii)

$$\begin{aligned} y &= Gu = G(K_P e - K_D sy) = GK_P(r - y) - GK_D sy \\ &= GK_P r - GK_P y - GK_D sy \end{aligned}$$

$$(1 + GK_P + GK_D s)y = GK_P r$$

$$y = \frac{GK_P}{1 + GK_P + GK_D s} r$$

目標値 r から出力 y までの伝達関数は

$$\frac{G(s)K_P}{1 + G(s)K_P + G(s)K_D s} \quad (35)$$

(iv) (35) 式に $G(s) = \frac{1}{0.4s^2 + cs + 0.1}$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{G(s)K_P}{1 + G(s)K_P + G(s)K_D s} &= \frac{\frac{1}{0.4s^2 + cs + 0.1} K_P}{1 + \frac{1}{0.4s^2 + cs + 0.1} K_P + \frac{1}{0.4s^2 + cs + 0.1} K_D s} \\ &= \frac{K_p}{0.4s^2 + cs + 0.1 + K_P + K_D s} \\ &= \frac{K_p}{0.4s^2 + (c + K_D)s + 0.1 + K_P} \end{aligned} \quad (36)$$

(v) 目標値がステップ信号 ($r(t) = 1$) のときの $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ は (36) 式の伝達関数で $s = 0$ を代入した値であり、

$$\frac{K_p}{0.1 + K_P}$$

である。これが問題文中のグラフより 0.9 に等しいので

$$\frac{K_p}{0.1 + K_P} = 0.9$$

これより

$$K_p = 0.9 \left(= \frac{9}{10} \right)$$

である.

$y(t)$ が振動的ではないことから (36) 式から得られる極は実数である. 伝達関数の分母の 2 次多項式から得られる判別式は負ではないので,

$$(c + K_D)^2 - 4 \cdot 0.4 \cdot (0.1 + K_P) = (c + K_D)^2 - 1.6 \geq 0$$

$$(c + K_D)^2 \geq 1.6$$

$$c + K_D \geq \sqrt{1.6}$$

$$K_D \geq \sqrt{1.6} - c$$

$$\left(\sqrt{1.6} = \sqrt{\frac{16}{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \right)$$

解説:

2 次系のステップ応答が振動的になるかならないかは, 極が複素数か実数かの違いによります.

なお, 設問にはありませんが, 「この制御系は安定なのか?」という疑問を持った人はよく勉強していますね. その視点は制御工学の学習と応用において重要です.

この問題では, m, c, k, K_P, K_D はすべて正のため, 閉ループ伝達関数の分母の 2 次式の係数はすべて正となります. 係数がすべて正の 2 次の多項式は安定な多項式 (教科書の 54 ページ参照) です. ですので制御系の安定性は保証されています (制御対象 $G(s)$ には不安定極も不安定零点もありませんので, 不安定極零消去の心配もありません).