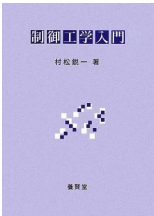


制御工学演習：現代制御

最終更新日：2025 年 7 月 1 日
山形大学工学部
村松

教科書として「制御工学入門」，養賢堂，村松鋭一著を用いています．



授業の進行とともに少しずつ更新しています．解答がないページがありますが，授業が進むごとに追加して掲載していきます．

目 次

1	状態方程式の導き方	3
2	状態推移行列	4
2.1	インパルス応答，初期値応答，ステップ応答	6
3	状態方程式と伝達関数	7
4	安定性	8
4.1	安定条件	8
4.2	結合系の安定条件	9
5	状態変数変換	10
5.1	対角正準形式	10
5.2	可制御正準形式	12
5.3	状態方程式と伝達関数の関係	14
5.4	可制御正準形式	15
6	可制御・可観測	16
6.1	可制御・可観測の判別	16
6.2	可制御性行列・可観測性行列	19
6.3	状態変数変換と可制御性・可観測性	20
7	状態フィードバック	21
7.1	可制御性と極配置	23

8	オブザーバ	24
9	線形システムに対するリアプノフの安定論	27
10	サーボ系	28
10.1	積分器	28
A	付録	29
A.1	可制御性行列	29

1 状態方程式の導き方

つぎの微分方程式で表されるシステムの状態方程式を求めよ。

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 5u(t)$$

ただし、状態 $x(t)$ を

$$x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \end{pmatrix}$$

とする。

(解答) 与えられた微分方程式を

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} = -4y(t) - 3 \frac{dy(t)}{dt} - 2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5u(t)$$

と変形する。これと

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \end{aligned}$$

をベクトルと行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \\ \frac{d^3 y(t)}{dt^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} u(t)$$

となり、これが状態方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

である。ただし、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

である。

解説：

3 階の微分方程式で表されるシステムは、2 階までの微分を状態に含むと状態方程式が得られます。 $\dot{x}(t)$ は $\frac{d}{dt}x(t)$ を表していますので、 $x(t)$ に 2 階微分があると $\frac{d}{dt}x(t)$ に 3 階微分が生じるからです。

教科書関連ページ： 142 ページ

2 状態推移行列

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (1)$$

で表されるシステムの解軌道について考える.

(i) $\mathbf{x}(t)$ の初期値を $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ とするとき, (1) 式の $\mathbf{x}(t)$ は

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} [(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \mathbf{x}_0 \quad (2)$$

と表わされることを示せ. ただし, $\mathcal{L}^{-1}$ はラプラス逆変換を表す.

(ii) (1) 式の解は初期値 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ に対して

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 \quad (3)$$

と表される. これと (2) 式とから

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1} [(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \quad (4)$$

が成り立つ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (5)$$

のときの $e^{\mathbf{A}t}$ を (4) 式を用いて求めよ.

参考:

$$\mathcal{L} \left[\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right] = s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0)$$

ただし, $\mathcal{L}[\mathbf{x}(t)] = \mathbf{X}(s)$ である.

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} \cos \beta t] = \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} \sin \beta t] = \frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$$

(解答)

(i)

(1) 式の両辺をラプラス変換すると

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} [(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \mathbf{x}_0$$

(ii)

$$\begin{aligned}
(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{pmatrix} s - \alpha & \beta \\ -\beta & s - \alpha \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} s - \alpha & -\beta \\ \beta & s - \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} & -\frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \\ \frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} & \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t} &= \mathcal{L}^{-1} [(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \\
&= \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t & -e^{\alpha t} \sin \beta t \\ e^{\alpha t} \sin \beta t & e^{\alpha t} \cos \beta t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

解説：

行列指数関数は無限級数と用いて定義されています．この定義のまま $e^{\mathbf{A}t}$ を求めようとするのは難しいのですが， $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ のラプラス逆変換を利用すると比較的簡単に求められます．行列の対角化とテーラー級数を組み合わせる方法もありますが，この問題の場合固有値が複素数になるため，数学的には可能ですが，計算が面倒になると思います．

(3) 式は状態の初期値応答です．この具体的表現は (2) 式によって計算可能です．

教科書関連ページ： 167 ページ

2.1 インパルス応答，初期値応答，ステップ応答

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

で表されるシステムがある。ただし，

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

- (i) $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ を計算せよ。
- (ii) このシステムの伝達関数 $G(s)$ を求め，状態の初期値を $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ とするときのインパルス応答 $g(t)$ を求めよ。
- (iii) $e^{\mathbf{A}t}$ を $\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$ によって求めよ。
- (iv) 状態の初期値を $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，入力 $u(t)$ を 0 とするときの状態の初期値応答 $\mathbf{x}(t)$ を求めよ。
- (v) 状態の初期値を $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，入力 $u(t)$ をステップ信号 ($u(t) = 1$) とするときの状態の初期値応答 $\mathbf{x}(t)$ を求めよ。
- (vi) 状態の初期値を $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，入力 $u(t)$ をステップ信号 ($u(t) = 1$) とするときのステップ応答 $y(t)$ を求めよ。

(解答)

7月下旬掲載予定。

解説：

(ii) ではインパルス応答を求めるために $G(s)$ を計算しています。

初期値応答 $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$ を求めるためには $e^{\mathbf{A}t}$ が必要となります。それを (iii) で求めています。

教科書関連ページ：

$G(s)$ の計算式は 147 ページにあります。

インパルス応答は 35 ページ， $u(t) = 0$ の初期値応答は 169 ページの上側， $u(t) \neq 0$ の初期値応答は 169 ページの下側，出力 $y(t)$ の応答は 170 ページにあります。教科書での初期時刻 t_0 はこの問題の場合 $t_0 = 0$ になります。

3 状態方程式と伝達関数

状態方程式と出力方程式が

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t) \\ y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

で表されるシステムの伝達関数は,

$$G(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$$

と表わされることを示せ.

(解答)

状態方程式と出力方程式をラプラス変換すると

$$s\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}U(s)$$

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{B}U(s)$$

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}U(s)$$

これを出力方程式のラプラス変換

$$Y(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s)$$

に代入すると

$$Y(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}U(s)$$

システムの伝達関数は $Y(s) = G(s)U(s)$ を満たすものなので

$$G(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$$

である.

解説:

この問題では状態の初期値 $\boldsymbol{x}(0)$ は 0 としています. 伝達関数を求める場合, 特に指定がなければ状態の初期値は 0 とします.

多入力多出力の場合には伝達関数行列になります.

教科書関連ページ: 147 ページ. 伝達関数行列については 148 ページ.

4 安定性

4.1 安定条件

つぎの式で表される $\boldsymbol{x}(t)$ が $\mathbf{0}$ に漸近するかしないかを判別せよ。

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(解答)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

とする。

$$\begin{aligned} |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 2) - 4 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 6 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda + 3) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}$ の固有値は $\lambda = 2, -3$ である。正の固有値 2 があるのでシステムは不安定であり、 $\boldsymbol{x}(t)$ は $\mathbf{0}$ に漸近しない。

解説：

線形システムの安定性は $\boldsymbol{A}$ の固有値で判別できます。

教科書関連ページ： 176 ページ

4.2 結合系の安定条件

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t) \\ y_1(t) = C_1 x_1(t) \end{cases}$$

および

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t) \\ y_2(t) = C_2 x_2(t) \end{cases}$$

で表わされる 2 つのシステムがあり、

$$u_1(t) = y_2(t), \quad u_2(t) = y_1(t)$$

という関係がある．この関係によって結合したシステムが安定である条件を、 $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ を用いた行列の性質として書け．

(解答)

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 y_2(t) = A_1 x_1(t) + B_1 C_2 x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 y_1(t) = A_2 x_2(t) + B_2 C_1 x_1(t)$$

結合したシステムの状態を

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

とすると

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

行列 $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix}$ のすべての固有値の実部が負であることが安定である条件となる．

解説:

2 つのシステムが結合したシステムの状態は、2 つのシステムの状態ベクトルを縦に並べたベクトルで表わされます．

オブザーバを併合したシステムの安定性を解析するとき、この考え方を uses ます．

教科書関連ページ：オブザーバを併合したシステムについては 224 ページを参照．

5 状態変数変換

5.1 対角正準形式

状態方程式と出力方程式が状態変数を $\mathbf{x}(t)$ を用いて

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

と表されるシステムがある。ただし、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

である。

状態変数 $\mathbf{x}(t)$ を正則行列 $\mathbf{T}$ を用いて $\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(t)$ で変換する。ただし、

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

とする。

(i) このシステムの状態方程式と出力方程式を状態変数 $\mathbf{z}(t)$ を用いて表せ。

(ii) このシステムの伝達関数を求めよ。

(解答)

(i)

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -8 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{z}(t) + \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} -8 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{z}(t) \end{cases}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
G(s) &= \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \\
&= \begin{pmatrix} -8 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \\
&= \frac{40}{s+1} - \frac{35}{s+2}
\end{aligned}$$

解説：

状態変数変換の一例です．この問題の変換行列 T は， A の固有ベクトルを用いて構成されています．伝達関数は変換後の状態方程式から計算するほうが少しだけ計算が楽になります．

教科書関連ページ： 181, 182 ページ．

5.2 可制御正準形式

伝達関数行列が

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{3s+4}{s^2+2s+1} \\ \frac{5s+6}{s^2+2s+1} \end{bmatrix}$$

と表されるシステムがある。

このシステムを

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

と表すときの行列 $\mathbf{C}$ を書け。

(解答) 状態方程式が可制御正準形式になっているので、出力方程式にも可制御正準形式を適用する。伝達関数行列が 2 行 1 列であることから出力は 2 つあり、出力方程式は

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

と表される。ここに可制御正準形式を適用すると、伝達関数の分子の係数を用いて

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \end{bmatrix}$$

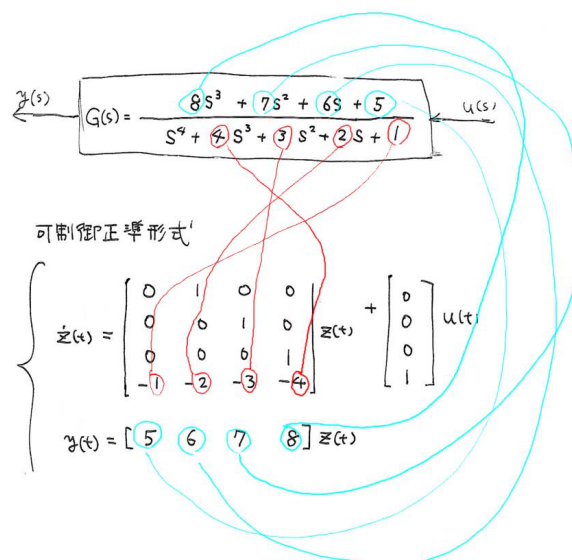
となる。よって、

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

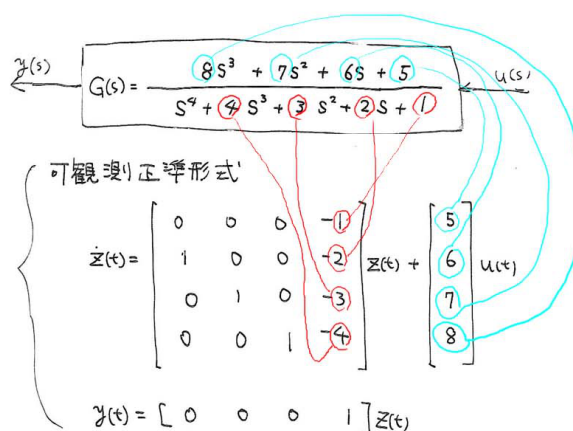
となる。

解説：

伝達関数を状態方程式に変換するとき、可制御正準形式を用いる方法があります。



あるいは可観測正準形式を用いる場合もあります。



教科書関連ページ： 190 ページ。

5.3 状態方程式と伝達関数の関係

状態方程式

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

の $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ がつぎのそれぞれの場合について, システムの伝達関数 $G(s)$ を求めよ.

(i)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iv)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(解答)

後日掲載

5.4 可制御正準形式

伝達関数が

$$G(s) = \frac{6s + 7}{s^3 + 3s^2 + 4s + 5}$$

であるシステムを

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

で表すときの $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ を可制御正準形式を用いて求めよ.

(解答)

後日掲載

6 可制御・可観測

6.1 可制御・可観測の判別

入力 $u(t)$, 状態 $\mathbf{x}(t)$, 出力 $y(t)$ の関係が

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

と表されるシステムがある.

- (i) このシステムが可制御かどうか判別せよ.
- (ii) このシステムが可観測かどうか判別せよ.
- (iii) このシステムの伝達関数を求めよ.

(解答)

(i)

$$|B \ AB| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

であり, 可制御である.

(ii)

$$\begin{vmatrix} C \\ CA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

であり, 可観測である.

(iii)

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= (-1 \ 1) \begin{pmatrix} s+5 & -1 \\ -2 & s+7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+5)(s+7)-2} (-1 \ 1) \begin{pmatrix} s+7 & 1 \\ 2 & s+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{s+4}{s^2 + 12s + 33} \end{aligned} \tag{6}$$

解説:

この問題のシステムは可制御かつ可観測であるため, 状態方程式が 2 次で, 伝達関数も 2 次になっています. 不可制御あるいは不可観測の場合, 状態方程式の次数よりも伝達関数の次数ほうが小さくなります.

教科書関連ページ:

可制御かどうかは教科書 196 ページの可制御であるための条件を用いて判別できます．可観測については 198 ページにあります．状態方程式から伝達関数を計算する式は 148 ページにあります．次数については 201 ページ．

状態方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t)$$

における $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ が

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるとする。このシステムは可制御か。可制御性行列を用いて確認せよ。

(解答)

7月下旬掲載予定。

解説：

可制御正準形式はその名前からいかにも可制御と思われそうですが、本当にそうなのか確認してみましょう。

教科書関連ページ：可制御正準形式は 186 ページ，可制御性行列は 196 ページ。

6.2 可制御性行列・可観測性行列

2 入力 3 出力で 4 次の状態方程式で表わされる制御対象について考える.

- (1) 可制御性行列は何行何列の行列になるか.
- (2) 可観測性行列は何行何列の行列になるか.

(解答)

制御対象の状態方程式を

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

とする.

(1)

システムが 4 次であることから可制御性行列は

$$\mathbf{U}_c = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \mathbf{A}^3\mathbf{B}]$$

である. $\mathbf{A}$ は 4 行 4 列, $\mathbf{B}$ は 4 行 2 列 であることから, $\mathbf{U}_c$ は 4 行 8 列である.

(2)

システムが 4 次であることから可観測性行列は

$$\mathbf{U}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^3 \end{bmatrix}$$

である. $\mathbf{A}$ は 4 行 4 列, $\mathbf{C}$ は 3 行 4 列 であることから, $\mathbf{U}_o$ は 12 行 4 列である.

解説: 16 ページでは可制御性行列, 可観測性行列ともに正方行列になりましたが, この問題では正方にはなりません. この場合, 可制御性や可観測性を調べたいとき $\mathbf{U}_c$ あるいは $\mathbf{U}_o$ に対し, それらそのままの行列式を用いるはできません. $\mathbf{U}_c$, $\mathbf{U}_o$ のランクが n かを調べる方法としては, 行基本変形によって主成分の個数を求める, あるいは $\mathbf{U}_c$, $\mathbf{U}_o$ のいくつかの行と列を取り出してできる正方部分に対して行列式を用いるなどがあります.

教科書関連ページ: 196, 198 ページ.

6.3 状態変数変換と可制御性・可観測性

状態方程式と出力方程式に対して正則行列を用いた状態変数変換をしても，可制御性および可観測性に変わりはないことを可制御性行列・可観測性行列を用いて示せ．

(解答)

後日掲載．

解説：

行列のランクは正則行列を掛けても変わりません．

7 状態フィードバック

制御対象の状態方程式を

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

とする．状態 $\mathbf{x}(t)$ は出力 $\mathbf{y}(t)$ として観測可能であり ($\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t)$ であり)， $u(t) = -\mathbf{F}\mathbf{x}(t)$ という状態フィードバックによって制御する．フィードバック制御系の極が $-2, -3$ となるような $\mathbf{F}$ を求めよ．

(解答)

与えられた状態方程式を

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

とする．

$$u(t) = -\mathbf{F}\mathbf{x}(t)$$

によってフィードバック制御系は

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{x}(t)$$

となるので $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}$ の固有値を考える．

$$\mathbf{F} = (f_1 \ f_2)$$

とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F} &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (f_1 \ f_2) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 - f_1 & -3 - f_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

固有多項式は

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F})| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -4 \\ -1 + f_1 & \lambda + 3 + f_2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda + 3 + f_2) - (-4)(-1 + f_1) \\ &= \lambda^2 + (f_2 + 1)\lambda + 4f_1 - 2f_2 - 10 \end{aligned}$$

と表される．フィードバック系の極が $-2, -3$ になるには上式が

$$(s + 2)(s + 3) = s^2 + 5s + 6$$

になればよい．係数を比較すると

$$\begin{cases} f_2 + 1 = 5 \\ 4f_1 - 2f_2 - 10 = 6 \end{cases}$$

となる．これを解いて

$$f_1 = 6, \ f_2 = 4$$

よって

$$F = [6 \ 4]$$

解説：

状態フィードバックゲイン F の求め方を教科書では 2 通り書いています．この問題は 2 次のシステムですので，次数の低いシステムの簡単な方法で求められます．

教科書関連ページ： 213 ページ

7.1 可制御性と極配置

システムが可制御でないとき状態フィードバックによる極配置ができなくなる理由を可制御性行列を用いて説明せよ.

(解答)

後日掲載.

8 オブザーバ

制御される変数 $v(t)$ と制御入力 $u(t)$ が

$$\ddot{v}(t) = av(t) + u(t)$$

で表されるシステムがある。ただし a は実数の定数である。センサによって測定できる出力は

$$y(t) = v(t) + \dot{v}(t)$$

である。

- (i) このシステムの状態を $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}$ として、状態空間表現

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

で表す。 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ を求めよ。

- (ii) このシステムが可観測であるための条件を a を用いて表せ。

- (iii) システムは可観測であるとし、オブザーバを

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}(y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t))$$

で設計する。ただし $\mathbf{L}$ はオブザーバゲインである。

である。推定誤差ベクトルを $\mathbf{e}_x(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ とするとき、 $\mathbf{e}(t)$ が満たす微分方程式を $\mathbf{A}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{C}$ を用いて表せ。

- (iv) $a = 3$ とする。オブザーバの極が $-2 \pm 3j$ となるようなオブザーバゲイン $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}$ を求めよ。

(解答)

(i)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{v}(t) \\ \ddot{v}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{v}(t) \\ av(t) + u(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= v(t) + \dot{v}(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{7}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii)

可観測性行列の行列式は

$$|\mathbf{U}_o| = \begin{vmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a$$

であり、これが 0 でないとき $\mathbf{U}_o$ のランクは 2 となり可観測である。よって、可観測であるための条件は

$$a \neq 1$$

(iii)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

と

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}(y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t))$$

の両辺を引き算すると

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{L}(y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t))$$

ここで $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ を代入すると

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{L}(\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t))$$

$\mathbf{e}_x(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ を用いると

$$\dot{\mathbf{e}}_x(t) = \mathbf{A}\mathbf{e}_x(t) - \mathbf{LC}\mathbf{e}_x(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e}_x(t)$$

となる。

(iv)

オブザーバの極は $A - LC$ の固有値である． $a = 3$ のとき，

$$\begin{aligned} A - LC &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\ell_1 & 1 - \ell_1 \\ 3 - \ell_2 & -\ell_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この固有多項式は

$$\begin{aligned} |A - LC| &= \begin{vmatrix} \lambda + \ell_1 & -1 + \ell_1 \\ -3 + \ell_2 & \lambda + \ell_2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + \ell_1)(\lambda + \ell_2) - (-1 + \ell_1)(-3 + \ell_2) \\ &= \lambda^2 + (\ell_1 + \ell_2)\lambda + 3\ell_1 + \ell_2 - 3 \end{aligned}$$

オブザーバの極が $-2 \pm 3j$ となるには固有多項式が

$$(\lambda - (-2 + 3j))(\lambda - (-2 - 3j)) = \lambda^2 + 4\lambda + 13$$

になればよい．係数比較により

$$\begin{cases} \ell_1 + \ell_2 = 4 \\ 3\ell_1 + \ell_2 - 3 = 13 \end{cases}$$

これより，

$$L = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

解説：

誤差が 0 へ収束するには，誤差 $e(t)$ が満たす微分方程式の係数行列 $A - LC$ の固有値（これをオブザーバの極と呼んでいます）の実部が負となることが必要です．この問題ではそのような L を状態フィードバックゲイン F を求めたときと同様な手法で求めています．

教科書関連ページ： 221 ページに誤差の収束条件が書かれています．

9 線形システムに対するリアプノフの安定論

状態 $x(t)$ が

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0$$

で表されるシステムがある。ただし x_0 は $\mathbf{0}$ でない有限な初期値であり、 A は n 行 n 列の行列で、正定値行列 Q に対して

$$A^T P + PA = -Q$$

を満たす正定値行列 P が存在するものとする。

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$$

とすると、

$$\frac{dV(x(t))}{dt} < 0$$

が成り立つことを示せ。

(解答)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) \\ &= x(t)^T A^T P x(t) + x(t)^T P A x(t) \\ &= x(t)^T (A^T P + PA) x(t) \\ &= -x(t)^T Q x(t) \\ &< 0 \end{aligned}$$

解説：

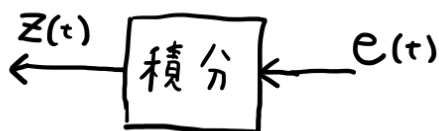
教科書での関連箇所は「最適レギュレータ」の章になります。ここでのシステムの安定性にはリアプノフ方程式 $A^T P + PA = -Q$ が関係しています。教科書の 234 ページにあるように、この問題の条件が成り立つときにはシステムは安定であり、 $x(t) \rightarrow 0$ となります。上記の $V(x(t))$ はリアプノフ関数と呼ばれます。

微分の計算では P は時間に無関係な定数行列であることに注意しましょう。正定値行列 Q に対しては $x(t)^T Q x(t) > 0$ が成り立ちますので、 $-x(t)^T Q x(t) < 0$ が成り立ちます。

教科書関連ページ： 234 ページ。

10 サーボ系

10.1 積分器



$$z(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau$$

上の図のように、入力 $e(t)$ を積分して出力 $z(t)$ とする積分器がある。このシステムを

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Be(t) \\ z(t) = Cx(t) \end{cases}$$

によって表すときの A, B, C を求めよ。

(解答)

7 月下旬掲載予定。

解説：

$$z(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau$$

の両辺を微分して得られる

$$\dot{z}(t) = e(t)$$

を状態方程式で表すことを考えれば答えが出ます。 $x(t)$ は自分で決める変数です。ここでは何を $x(t)$ とすればよいでしょうか。

このシステムは伝達関数で表せば $\frac{1}{s}$ になるものです。これを状態方程式と出力方程式で表す問題とも考えられます。 $\frac{1}{s}$ の極は 0 です (これもヒントです)。

教科書関連ページ： $\frac{1}{s}$ と積分との関係は 16 ページ、積分要素については 117 ページ。

A 付録

A.1 可制御性行列

可制御であるための条件を教科書 204 ページで説明しています。下の画像と合わせて読むとわかりやすくなると思います。

ケリー-ハミルトンの定理より

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots + \frac{1}{n!} A^n t^n + \frac{1}{(n+1)!} A^{n+1} t^{n+1} + \dots$$

$= \begin{bmatrix} I & A & A^2 & \dots & A^{n-1} \end{bmatrix}$ の系形系結合

$$= g_0(t)I + g_1(t)A + g_2(t)A^2 + \dots + g_{n-1}(t)A^{n-1}$$

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$t=0$ と $t=T$ の $x(t)$ は

$$x(T) = e^{AT} x(0) + \int_0^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

「可制御」とは、 u の操作で、任意のベクトルにできる。

$$e^{-AT} x(T) - x(0) = \int_0^T e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau$$

任意の n 次元ベクトルにできる

$$= \int_0^T \{I + 0A + 0A^2 + \dots + 0A^{n-1}\} B u(\tau) d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^T u(\tau) d\tau \\ \int_0^T 0u(\tau) d\tau \\ \int_0^T 0u(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_0^T 0u(\tau) d\tau \end{bmatrix}$$

そのためには

任意の n 次元ベクトル

ベクトル

この中に n

$= 0 + 0 + \dots + 0$

本の独立なベクトルが存在しなければならぬ

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$