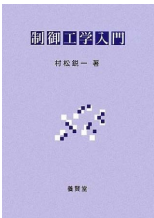


制御工学演習：非線形システム

最終更新日：2025 年 7 月 1 日
山形大学工学部
村松

教科書「制御工学入門」では非線形システムについては扱っていませんが，状態や動的システムなどの制御に関する基本的な考え方，線形近似したシステムの安定性や可制御性について参考にしてください．



授業の進行とともに少しずつ更新しています．解答がないページがありますが，授業が進むごとに追加して掲載していきます．

目 次

1	1 次のシステム	2
1.1	1 次のシステムの平衡点	2
1.2	テーラー展開による 1 次近似（スカラの場合）	3
1.3	線形近似システム（スカラ系）	4
1.4	スカラ系の平衡点での安定性	5
2	非線形システムの線形近似	6
3	振り子のシステム	7
3.1	振り子の状態方程式	7
3.2	2 次のシステムの平衡点	8
3.3	非線形システムの平衡点近傍での安定化	9

1 1 次のシステム

1.1 1 次のシステムの平衡点

$$\dot{x}(t) = 1 - \sqrt{2} \sin x(t)$$

で表される非線形システムがある.

(i) このシステムの $0 \leq x < 2\pi$ における平衡点をすべて求めよ.

(ii) 初期状態が $x(0) = \pi/6$ のとき, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ の値を求めよ.

(解答)

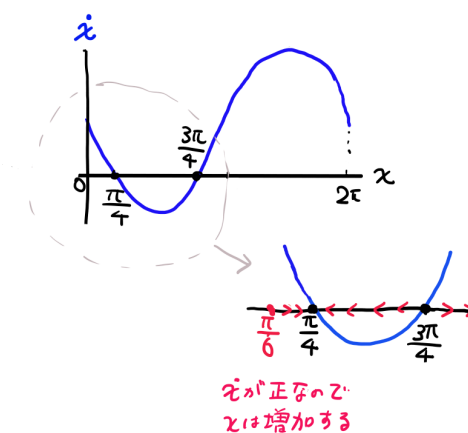
(i)

$$1 - \sqrt{2} \sin x = 0$$

を $0 \leq x < 2\pi$ で解くと

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ と } \frac{3\pi}{4}$$

(ii)



$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{\pi}{4}$$

解説:

1 次のシステムの「平衡点」とは $\dot{x}(t) = 0$ となり, $x(t)$ が動かなくなる点です. それは与えられた微分方程式の右辺が 0 となる x の値として求めることができます.

点 $x = \frac{\pi}{6}$ で $\dot{x}(t)$ は正の値をとり, その点で $x(t)$ は増加します. 右向きを正とした x 軸では増加は右向きを意味し, 点は右へ動きます. しばらく右に動くと $x = \frac{\pi}{4}$ で $\dot{x}$ が 0 となり, それは点の動きが止まることを意味します.

1.2 テーラー展開による 1 次近似（スカラの場合）

関数 f を $f(x) = 1 - \sqrt{2} \sin x$ とする．ある実数の定数 x_c の近くで x を $x = x_c + \delta x$ と表す．ただし， δx は x_c 付近での微小な変化量とする．関数 f を $x = x_c$ でテーラー展開して δx の 1 次関数で近似することを「 $x = x_c$ での 1 次近似を求める」という．

(i) $x_c = \frac{\pi}{6}$ での 1 次近似を求めよ．

(ii) $x_c = \frac{\pi}{4}$ での 1 次近似を求めよ．

(iii) $x_c = \frac{3\pi}{4}$ での 1 次近似を求めよ．

(解答)

$f(x_c + \delta x)$ を x_c 付近でテーラー展開して 1 次の項 δx までで打ち切ると

$$f(x_c + \delta x) \simeq f(x_c) + f'(x_c)\delta x$$

となる．

(i)

$$f\left(\frac{\pi}{6} + \delta x\right) \simeq f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\delta x = 1 - \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{6} - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{6} \delta x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} \delta x$$

(ii)

$$f\left(\frac{\pi}{4} + \delta x\right) \simeq f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\delta x = 1 - \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \delta x = -\delta x$$

(iii)

$$f\left(\frac{3\pi}{4} + \delta x\right) \simeq f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)\delta x = 1 - \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4} \delta x = \delta x$$

1.3 線形近似システム（スカラー系）

非線形システム $\dot{x}(t) = f(x(t)) = 1 - \sqrt{2} \sin x(t)$ に対して、ある点 x_c 付近の $x(t)$ に限定して考える． $x(t) = x_c + \delta x(t)$ とし、状態変数を $\delta x(t)$ とする線形近似システムを求める．

(i) $x_{c0} = \frac{\pi}{6}$ での線形近似システムの状態方程式を求めよ．

(ii) $x_{c1} = \frac{\pi}{4}$ での線形近似システムの状態方程式を求めよ．

(iii) $x_{c2} = \frac{3\pi}{4}$ での線形近似システムの状態方程式を求めよ．

(解答)

x_c 付近での線形近似システムを求めるときは、 $\dot{x}(t) = f(x(t))$ に $x(t) = x_c + \delta x(t)$ を代入して、右辺の f の 1 次近似を求める．

(i)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_{c0} + \delta x(t)) &= f\left(\frac{\pi}{6} + \delta x\right) \\ \dot{\delta x}(t) &= f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\delta x(t) \\ \dot{\delta x}(t) &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\delta x(t)\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_{c1} + \delta x(t)) &= f\left(\frac{\pi}{4} + \delta x\right) \\ \dot{\delta x}(t) &= f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\delta x(t) \\ \dot{\delta x}(t) &= -\delta x(t)\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_{c1} + \delta x(t)) &= f\left(\frac{3\pi}{4} + \delta x\right) \\ \dot{\delta x}(t) &= f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)\delta x(t) \\ \dot{\delta x}(t) &= \delta x(t)\end{aligned}$$

解説：

(i) は平衡点ではない x_{c0} 付近、(ii) と (iii) は平衡点付近での線形近似を考えています．(ii) と (iii) に見られるように、平衡点における f は $f(\frac{\pi}{4}) = 0$ 、あるいは $f(\frac{3\pi}{4}) = 0$ となるため、右辺の定数項は 0 となり、

$$\dot{\delta x}(t) = a\delta x(t) \quad (a \text{ は定数})$$

という形式になります．

1.4 スカラ系の平衡点での安定性

4 ページの結果を用いてつぎの問題を考える.

非線形システム $\dot{x}(t) = 1 - \sqrt{2} \sin x(t)$ の平衡点付近の安定性を解析する.

(i) 平衡点 $x_{c1} = \frac{\pi}{4}$ が安定か調べよ.

(ii) 平衡点 $x_{c2} = \frac{3\pi}{4}$ が安定か調べよ.

(解答)

(i)

平衡点 $x_{c1} = \frac{\pi}{4}$ 付近での状態方程式は 4 ページの結果から

$$\dot{\delta x}(t) = -\delta x(t)$$

である. 右辺の $\delta x(t)$ の係数が -1 で負であることから平衡点 $x_{c1} = \frac{\pi}{4}$ は安定である.

(ii)

平衡点 $x_{c2} = \frac{3\pi}{4}$ 付近での状態方程式は 4 ページの結果から

$$\dot{\delta x}(t) = \delta x(t)$$

である. 右辺の $\delta x(t)$ の係数が 1 で正であることから平衡点 $x_{c1} = \frac{3\pi}{4}$ は不安定である.

解説:

非線形システムの状態変数 $x(t)$ が平衡点 x_c 付近で $x_c + \delta x(t)$ と表される状況を考えます. x_c からのわずかな変動 $\delta x(t)$ が時間とともに 0 に収束するとき, すなわち, $x(t)$ が x_c からわずかに離れても x_c へ戻っていくとき「平衡点 x_c は安定」と呼ばれます¹.

平衡点付近での $\delta x(t)$ の挙動は線形近似システム

$$\dot{\delta x}(t) = a\delta x(t), \text{ ただし } a \text{ は定数}$$

で表されます. この微分方程式の解は初期値 $\delta x(0)$ に対して

$$\delta x(t) = e^{at}\delta x(0)$$

となります. $a < 0$ のとき, 指数関数の性質として $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} = 0$ なので, $\delta x(t) \rightarrow 0$ となります. すなわち状態変数 $x(t)$ は x_c に近づいていきます. 上記をまとめると「 a が負のとき平衡点は安定」, 「 a が正のとき平衡点是不安定」と言えます.

¹非線形システムの「安定」にはいろいろな種類の安定が定義されています. この問題のように $\delta x(t)$ が 0 に収束する場合, 特に「漸近安定」と呼ぶことがあります.

2 非線形システムの線形近似

前頁までは $x(t)$ がスカラーの場合の考察でした．システムの状態がベクトル $x(t)$ の場合もほぼ同様な理論が成り立ちます．

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

が状態方程式の場合には f は多変数ベクトル値関数になりますので，テーラー展開による 1 次近似で注意が必要です．あるベクトル x_c の近くの x を

$$x = x_c + \delta x$$

とする場合，

$$f(x_c + \delta x) \simeq f(x_c) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_c} \delta x$$

となります．ここで δx に掛かっている $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_c}$ は「ヤコビ行列」と呼ばれるもので後の例題で詳しく解説します．記号が複雑ですが定数行列なので

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_c}$$

と定義すると， f の 1 次近似は

$$f(x_c + \delta x) \simeq f(x_c) + A\delta x$$

となります．ここで x_c が平衡点であることから $f(x_c) = 0$ なので

$$f(x_c + \delta x) \simeq A\delta x$$

となります．

非線形システム $\dot{x}(t) = f(x(t))$ の状態 $x(t)$ の挙動を $x(t) = x_c + \delta x(t)$ として解析すると

$$\frac{d}{dt}(x_c + \delta x(t)) = f(x_c + \delta x(t))$$

となり，ここで上記の線形近似を用いると $x = x_c$ 付近で

$$\dot{\delta x}(t) = A\delta x(t)$$

となり，線形近似システムによって解析できることになります．

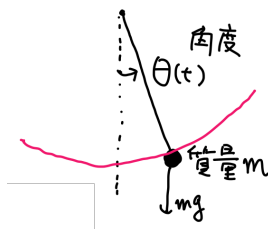
私たちは

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

の解析方法を教科書で学びました．非線形システムでも平衡点の近くであれば教科書の方法を適用できます．

3 振り子のシステム

3.1 振り子の状態方程式



質量 m のおもりが長さ ℓ の軽い棒の先についた振り子がある。鉛直下向きを角度 0 とし、反時計方向の回転角を $\theta(t)$ とする。おもりの速度 $\ell \dot{\theta}(t)$ に比例した摩擦力が働き、比例定数を d とする。重力加速度を g として、つぎの問いに答えよ。

(i) 振り子の運動方程式を求めよ。

(ii) 状態を $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$ として、振り子を状態方程式 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ と表すときの $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ を求めよ。

(解答)

(i)

$$m\ell\ddot{\theta}(t) = -mg \sin \theta(t) - d\ell\dot{\theta}(t)$$

(ii)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ -\frac{g}{\ell} \sin \theta(t) - \frac{d}{m} \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$$

よって,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ -\frac{g}{\ell} \sin \theta(t) - \frac{d}{m} \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$$

である。

解説：

$\mathbf{x}(t)$ が $\theta(t)$ と $\dot{\theta}(t)$ から構成されているので、 $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ は $\mathbf{f}(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ であり、 $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ は $\theta(t)$ と $\dot{\theta}(t)$ を用いて表される関数です。

3.2 2 次のシステムの平衡点

振り子のシステムにおいて、 $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ とする。角度 $\theta(t)$ の値は $0 \leq \theta(t) < 2\pi$ とすると $0 \leq x_1(t) < 2\pi$ となる。また、 $\frac{g}{\ell}$ を k , $\frac{d}{m}$ を c とする。

非線形システム $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ について考える。ただし、

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -k \sin x_1(t) - cx_2(t) \end{pmatrix}$$

であり、 k と c は正の実数とする。

- (i) $0 \leq x_1(t) < 2\pi$ とするとき、このシステムの平衡点をすべて求めよ。
- (ii) 上で求めた平衡点のそれぞれについて、安定か不安定かを判別せよ。

(解答)

7 月下旬に掲載予定。

3.3 非線形システムの平衡点近傍での安定化

非線形システム $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t))$ について考える。ただし、

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -k \sin x_1(t) - cx_2(t) + u(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

であり、 k と c は正の実数、 $u(t)$ はシステムに加える制御入力である。

$\mathbf{x}$ が $\mathbf{x}_{c2} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 u が $u_{c2} = 0$ のとき (1) 式の右辺は 0 となることから、 $\mathbf{x}_{c2}$ 、 u_{c2} を (1) 式のシステムの平衡点と見なす。この平衡点の近くでの制御を考えるため、状態を $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{c2} + \delta\mathbf{x}(t)$ 、入力を $u(t) = u_{c2} + \delta u(t)$ と表す。 $u_{c2} = 0$ であることから $u(t) = \delta u(t)$ なので、記号の簡単化のため以下では $\delta u(t)$ を $u(t)$ と書く。

(i) 平衡点 $\mathbf{x}_{c2}$ 、 u_{c2} 付近での線形近似システムを

$$\dot{\delta\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_2\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

とする。 $\mathbf{A}_2$ 、 $\mathbf{B}$ を求めよ。

(ii) $\delta\mathbf{x}(t)$ が測定可能であるとして、フィードバック制御

$$u(t) = -\mathbf{F}\delta\mathbf{x}(t)$$

で制御する。平衡点 $\mathbf{x}_{c2}$ 、 u_{c2} の近くでの制御系の状態方程式を $\delta\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{A}_2$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{F}$ を用いて表せ。

(iii) 制御対象のパラメータを

$$c = 1, \quad k = 5$$

とし、フィードバックゲイン $\mathbf{F}$ を

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix}$$

と表わす。平衡点 $\mathbf{x}_{c2}$ 、 u_{c2} の近くでの制御系の極（線形近似システムの極）が $-2 \pm 3j$ となるようなフィードバックゲイン $\mathbf{F}$ を求めよ。

(解答)

7 月下旬に掲載予定。