

副読本

「制御工学入門」

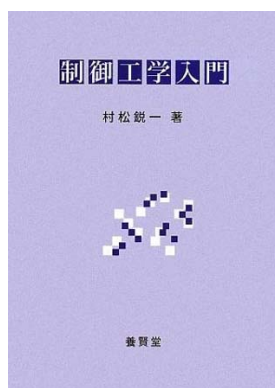
山形大学工学部

村松鋭一

この資料は

「制御工学入門」，村松鋭一，養賢堂

の副読本です。



目次

第 1 章	序論	1
1.1	制御系設計	1
第 2 章	ラプラス変換	5
2.1	ラプラス変換の定義	5
2.2	いろいろな信号のラプラス変換	6
2.3	ラプラス変換の性質	7
第 3 章	伝達関数	9
3.1	伝達関数	9
3.2	伝達関数の求め方	10
第 4 章	ブロック線図	12
4.1	ブロック線図の構成要素	13
4.2	ブロック線図の直列結合	15
4.3	ブロック線図の並列結合	16
4.4	フィードバック系のブロック線図と伝達関数	17
第 5 章	システムの応答解析	19

5.1	伝達関数を用いた出力信号の求め方	19
5.2	ステップ関数	20
5.3	ステップ応答	20
5.4	1次系・2次系の応答	23
第6章	安定性・極と応答との関係	26
6.1	入出力システムの安定性	27
6.3	極と安定性の関係	28
6.4	安定な多項式	31
6.5	ラウスの方法	31
第7章	周波数応答	34
7.1	正弦波入力に対する応答	34
7.2	周波数応答関数	37
7.3	ボード線図	39
7.4	ボード線図を見てわかること	39
7.5	ボード線図の概形	41
7.6	ベクトル軌跡	44
第8章	フィードバック系の安定性	45
8.1	コントローラの設計と制御系の応答	45
第9章	ナイキストの安定判別法	49
9.1	開ループ伝達関数による閉ループ系の安定判別	50
9.2	ナイキスト線図	51
9.3	ナイキストの安定判別	52
9.4	開ループ伝達関数が安定な場合	54

第 10 章	安定余裕と感度関数	55
10.1	安定余裕	55
10.2	感度関数	59
10.3	安定余裕と感度特性	61
第 11 章	定常特性・過渡特性・周波数特性	62
11.1	定常偏差	63
11.2	制御系の過渡特性	64
第 12 章	コントローラの構成要素	66
12.1	コントローラの基本要素	67
12.2	開ループ伝達関数と閉ループ伝達関数	68
第 13 章	フィードバック制御系の設計	69
13.1	制御の目的	69

第 1 章

序論

1.1 制御系設計

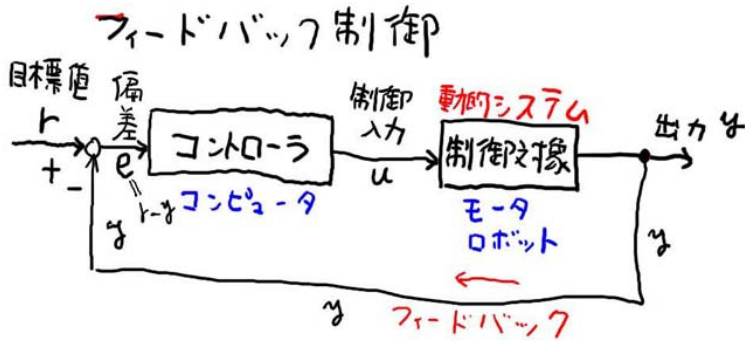
教科書の 1 ページを開いてください。

基礎的な用語を解説しています。「制御対象」として想定しているのはさまざまな機械です。制御工学ではある一つの機械だけに限定するのではなく、制御されるさまざまな機械と抽象化して「制御対象」と呼んでいます。

教科書の 2, 3 ページを開いてください。

制御工学では制御されるシステムを入力と出力を持つものと考えます。入力はそのシステムを操作するもの、出力は操作に反応して変化するものです。

教科書 3 ページのフィードバック制御が制御工学の基本的な考え方を表しています。図 1.4 のエアコンの例がわかりやすいと思います。目標温度に室温を制御するため、常に室温をセンサで測って目標温度と比較します。室温は制御の結果として得られる信号ですが、それをフィードバックして目標と比較するところがフィードバック制御の特徴です。



教科書の4, 5ページを開いてください。

室温を目標温度に近づけるのが制御の目的です。瞬時に一致させるのは不可能ですが、できるだけ早く目標に到達させることが望まれます。

図1.6は「モデリング」と「制御則の設計」という2つのテーマが制御系設計に含まれていることを意味しています。「モデリング」とは制御対象を式^{*1}で表すこと、「制御則の設計」とは制御に用いる式を考え決めることです。

教科書の5ページの一番下の行を読んでください。

「動的システム」という言葉が説明されています。まずは、教科書2ページの上の図を見て、システムには入力と出力があることを思い出してください。それらの関係において「現在の出力に過去の入力に影響するシステム」を動的システムと呼んでいます。

教科書の6ページを開いてください。

まず教科書6ページの下図1.9を見てください。積分の複雑な式が書いてありますが、大事なのは積分区間が0から t になっていることです。左辺の出力 $y(t)$ の値が0から t の u で決まる、これは上で述べた「現在の出力に過去の入力に影響するシステム」と整合します。ということは図1.9のシステムは動的システムです。

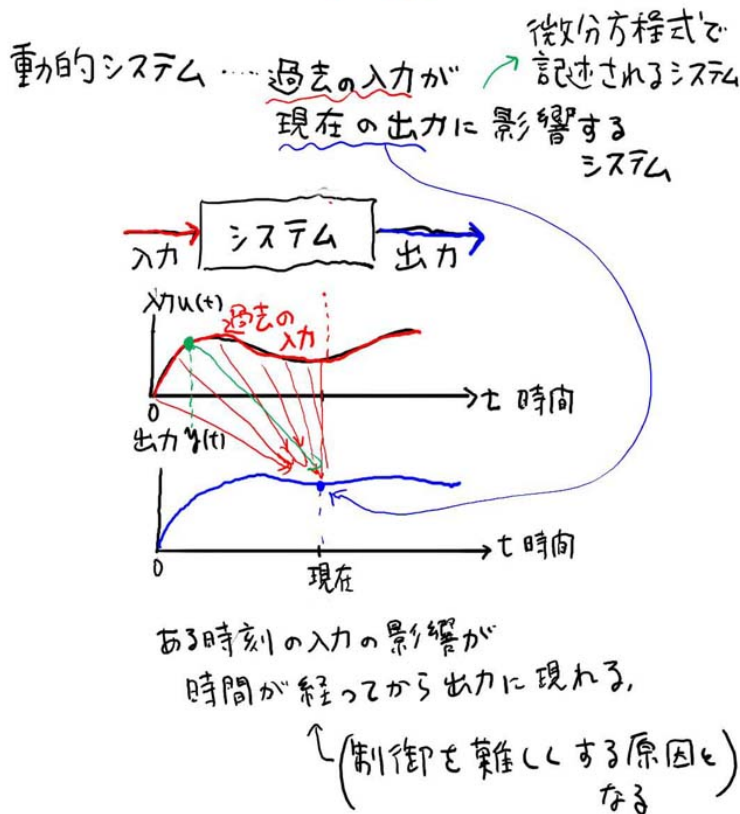
実は図1.9のシステムは図1.8でも表すことができます。両

^{*1} 後の章で伝達関数という式を学びます

者の関係は図 1.8 が微分方程式，図 1.9 がその解ということ
 です．図 1.9 が動的システムなので図 1.8 も動的システムといえ
 ます．

つまり，微分方程式で表されるシステムは「動的システム」
 と言えます．

微分方程式の一つの例は力学の運動方程式です．運動方程
 式で表されるシステム，すなわち機械システムは動的システ
 ムということになります．



教科書の7ページを開いてください．

微分方程式という言葉を読んで「これは難しそうだ」と思っ
 たかもしれませんが，それよりも，微分方程式が姿を変えた
 「伝達関数」と呼ばれるものが制御工学ではよく出てきます．
 その一つの例が図 1.10 です． $\frac{3}{s+2}$ が伝達関数です．

この $\frac{3}{s+2}$ は教科書6ページの真ん中にある $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) =$

$3u(t)$ が姿を変えたものです。その変換については第3章で学びます。

教科書の8ページを開いてください。

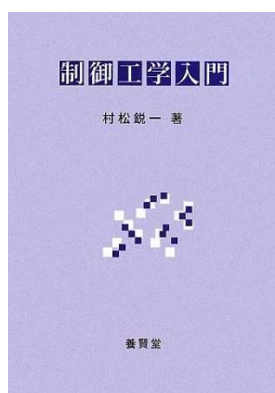
制御系（制御しているシステム）は「安定」であることが望まれます。制御系が「**安定**」とはシステムの**信号が発散しない**ことです。図1.14は不安定になっている例です。部屋の温度がこんなに上がったたり下がったりしては困ります。不安定にならないように制御することが重要です。

教科書の9ページから11ページの図を見てください。

先に述べたフィードバック制御を、情報処理の観点から、生体との関係から、また、微分方程式の観点から書き表しています。いろいろありますがこれらすべてを教科書11ページの図1.20のように伝達関数に置き換えて制御の方法を考えます。制御工学においては、伝達関数がとても重要で、その求め方、その性質、物の動きと伝達関数の関係などを勉強していきます。

第 2 章

ラプラス変換



教科書の 12 ページを開いてください。

2.1 ラプラス変換の定義

t の関数 $x(t)$ を s の関数 $X(s)$ に変換するのがラプラス変換です。 t は時間を表しています。 s は複素数で物理的な意味づけは難しいです*¹。

*¹ 第 7 章で $s = j\omega$ とすることで角周波数 ω と関係してきます。

時間 t の関数 $x(t)$ をラプラス変換すると $X(s)$ になります。

関数 $x(t)$ は例えば角度や電圧など何らかの物理量の時間変化を表す関数と考えます。時間とともに変化する物理量をセンサーで測って伝えるとすると「信号」と呼んでもよくなります。

以下では「関数」を「信号」に置き換えて説明します。

2.2 いろいろな信号のラプラス変換

具体例をいくつか示します。教科書の u_s は 1 と思ってください。

$x(t) = 1$ という信号をラプラス変換すると $X(s) = \frac{1}{s}$ になります。

教科書の 13 ページを開いてください。

$x(t) = e^{-2t}$ という信号をラプラス変換すると $X(s) = \frac{1}{s+2}$ になります。

$x(t) = \sin 3t$ という信号をラプラス変換すると $X(s) = \frac{3}{s+3^2}$ になります。

ラプラス変換 $f(t)$ を $F(s)$ に変換

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

例 $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$

	\mathcal{L}	\rightarrow	$\frac{1}{s}$	制御工学 では 公式として 用いる
a は定数	\mathcal{L}	\rightarrow	$\frac{1}{s+a}$	
ω は定数	\mathcal{L}	\rightarrow	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	

$$\left. \begin{array}{l} f(t) \rightarrow F(s) \\ g(t) \rightarrow G(s) \end{array} \right\} \text{のとき}$$

$$af(t) + bg(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} aF(s) + bG(s)$$

a, b は定数

「ラプラス変換の線形性」

2.3 ラプラス変換の性質

教科書の 15 ページを開いてください。

微分した関数をラプラス変換すると、 s が掛かります。

微分には s を掛けることが対応します。

教科書の 16 ページを開いてください。

n 階微分には s^n を掛けることが対応します。

積分には $\frac{1}{s}$ を掛けることが対応します。

教科書の 17 ページを開いてください。

ラプラス逆変換はこの PDF 資料 6 ページのラプラス変換の逆として、つぎのように考えます。

$X(s) = \frac{1}{s}$ をラプラス逆変換すると $x(t) = 1$ になります,.

$X(s) = \frac{1}{s+2}$ をラプラス逆変換すると $x(t) = e^{-2t}$ になります,.

$X(s) = \frac{3}{s+3^2}$ をラプラス逆変換すると $x(t) = \sin 3t$ になります.

教科書の 19 ページを開いてください.

ラプラス変換は、時間 t で表される信号を s で表される関数へ変換するものです。時間 t の領域での微分は、 s 領域で s をかけること積分は s で割ること、というところが重要です。

第 3 章

伝達関数

教科書の 20, 21 ページを開いてください。

3.1 伝達関数

教科書 20 ページの図のように，入力に対して出力が反応するシステムを考えてください．例えばモータの場合，入力が電圧，出力が回転速度です．モータの回転特性を式で表したいとします．

このとき教科書 21 ページのように伝達関数にします．この図の特徴は s が用いられていることです．前章のラプラス変換の s です．

モータよりも簡単な例として，電気回路を考えてみます．

教科書の 22 ページを開いてください．

図の電気回路では，左から入力電圧が入り，回路を通して右から出力電圧が出ます．この回路の特性を伝達関数 $G(s)$ で表してみます．

まず必要となるのがこの回路の特性を表す方程式です．それが (3.4) 式の回路方程式です（ある種の微分方程式です）．

伝達関数を求めるためにこの両辺をラプラス変換します．

(3.5) 式を見てください。 $u(t)$ は $U(s)$ に、 $y(t)$ は $Y(s)$ に変換されています。ここで重要なのは

$$\frac{dy(t)}{dt} \text{ は } sY(s) \text{ に変換される}$$

ということです。「微分」が「 s を掛ける」ことに対応する、ということがここで使われています。 RC のような定数が掛かるときは変換後もそのまま掛かります。

伝達関数は入力 $U(s)$ が出力 $Y(s)$ にどう伝わるかを表す関数なので、

$$Y(s) = \text{「伝達関数」} \times U(s)$$

という関係があります。この式と (3.6) 式を比べると伝達関数が $\frac{1}{RCs+1}$ となります。伝達関数によく用いられる記号は $G(s)$ なので

$$G(s) = \frac{1}{RCs+1}$$

となります。 RC は定数で 8 なので

$$G(s) = \frac{1}{8s+1}$$

となります。これが図の電気回路の伝達関数です。伝達関数は電気回路の特性を表すものになっています。 $\frac{1}{8s+1}$ のどこをどう見ると電気回路の特性に結び付くのかは後の章で説明します。

教科書の 21 ページを開いてください。

3.2 伝達関数の求め方

教科書 21 ページの下半分に求め方の手順が書いてあります。さきほどの電気回路の例と同じです。

例題を示します。

例題 つぎの微分方程式で表されるシステムの
伝達関数 $G(s)$ を求めよ。

$$\text{微分} \quad \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 2u(t)$$

(答) 両辺をラプラス変換

$$sY(s) + 3Y(s) = 2U(s)$$

$$(s+3)Y(s) = 2U(s)$$

$$Y(s) = \frac{2}{s+3} U(s)$$

$$G(s) = \frac{2}{s+3}$$

教科書の 23, 24 ページを開いてください。

伝達関数は一般に分数の形をしていて、分子分母が s の多項式になっています。

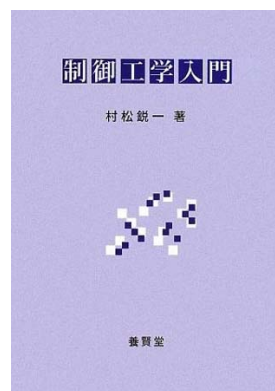
教科書の 25 ページを開いてください。

伝達関数を用いる利点は、複数のシステムを結合^{*1}したとき、結合後のシステムを簡単な足し算、掛け算や割り算で表すことができるようになることです。

*1 直列や並列や、後に述べる「フィードバック結合」などがあります

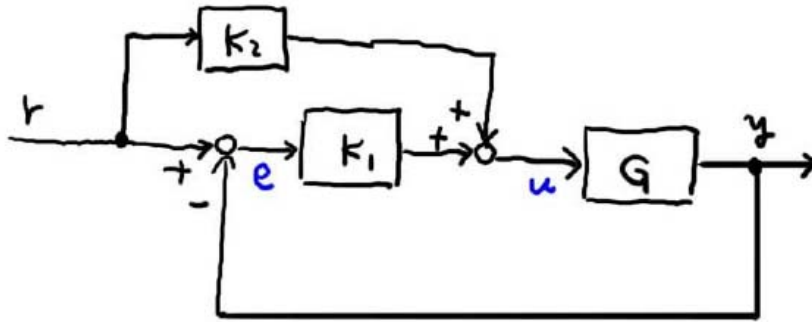
第4章

ブロック線図

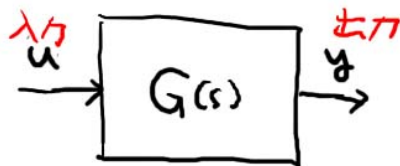
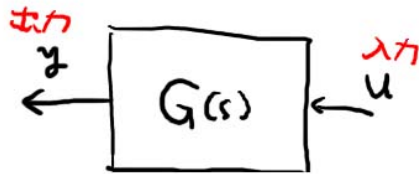


教科書の 27 ページを開いてください。

4.1 ブロック線図の構成要素



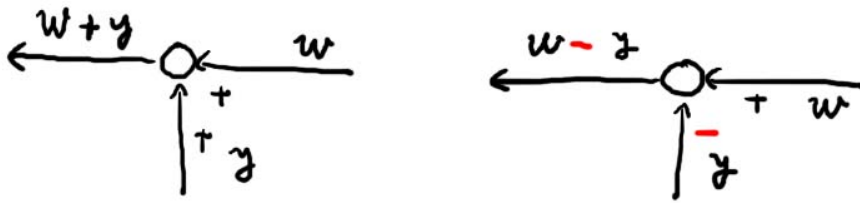
ブロック線図とは例えば上の図のようなものです。



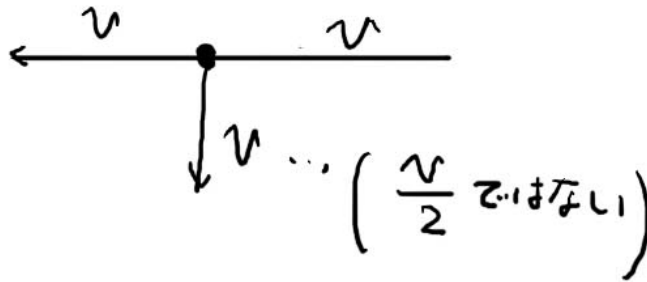
伝達関数
 $y(s) = G(s) u(s)$

四角形は「システム」、矢印は「信号」を表しています。システムと信号の関係は上のようになります。

教科書の28ページを開いてください。



○で信号が合流すると上のようになります。



●で信号が引き出されます。

教科書の29ページを開いてください。

4.2 ブロック線図の直列結合

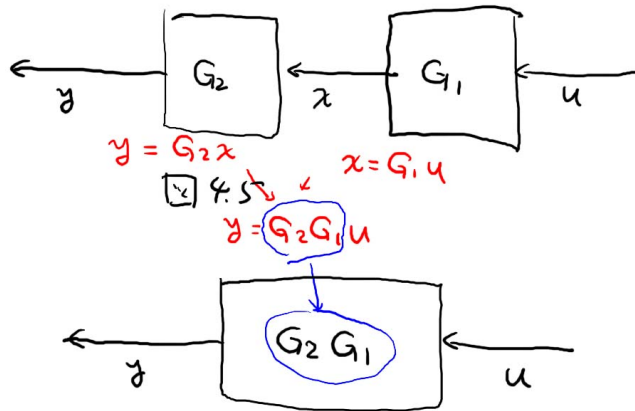
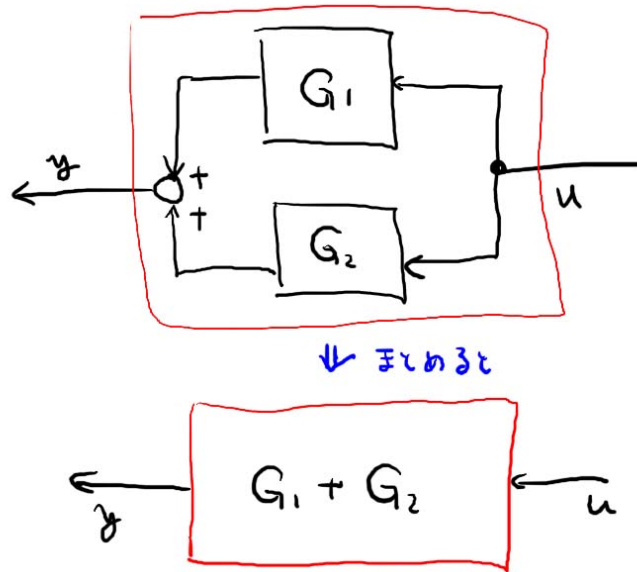


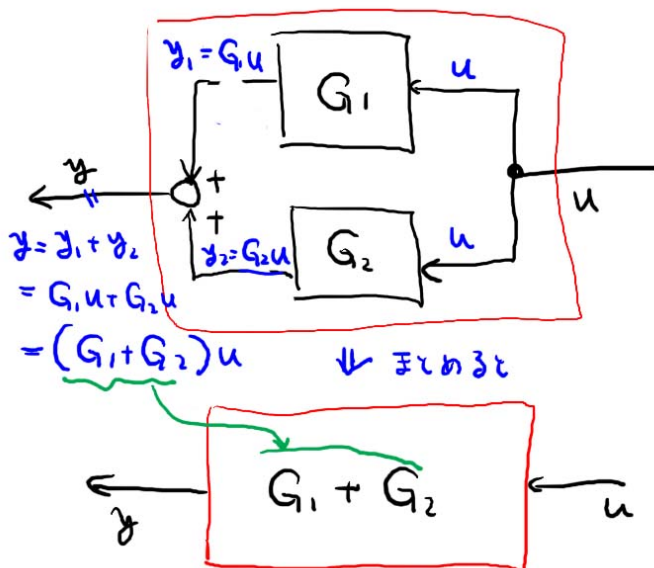
図4.6

G_2 と G_1 の直列結合をひとつにまとめると $G_2 G_1$ になります。その理由は上の図の中の式を見るとわかると思います。

4.3 ブロック線図の並列結合



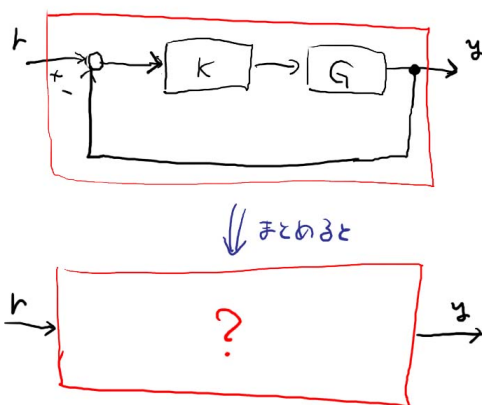
G_2 と G_1 の並列結合をひとつにまとめると $G_1 + G_2$ になります。



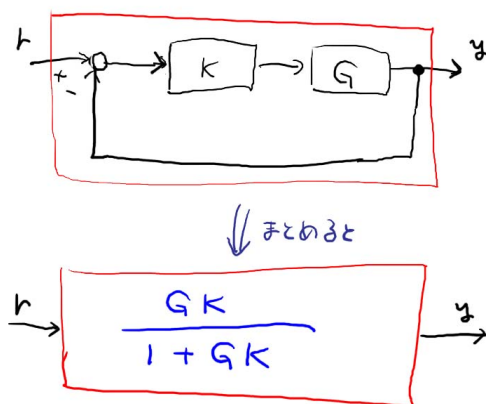
G_2 と G_1 の並列結合をひとつにまとめると $G_1 + G_2$ になる理由は上の図からわかると思います。

4.4 フィードバック系のブロック線図と伝達関数

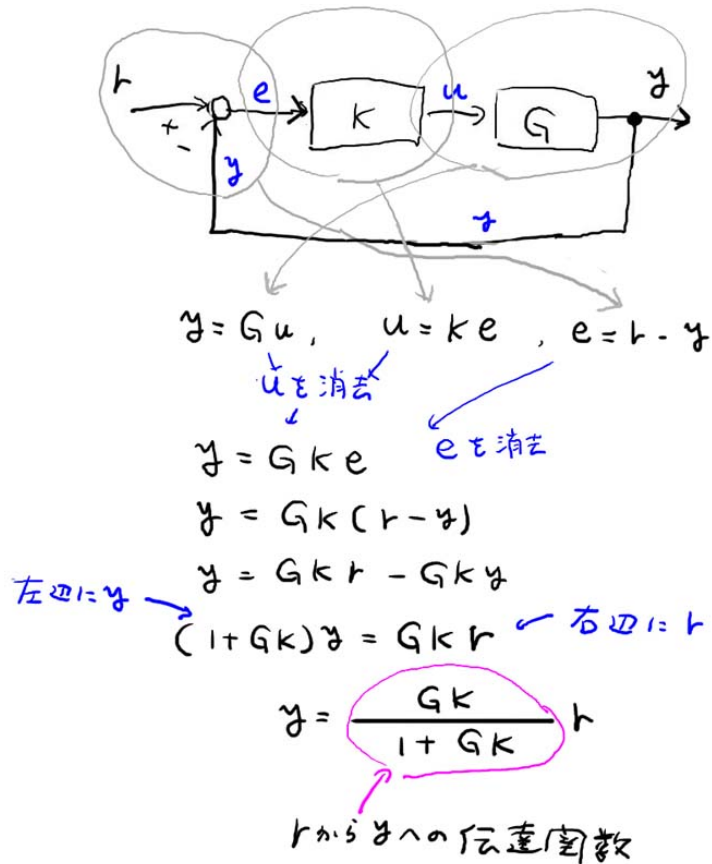
教科書の 30 ページを開いてください。



上のようなフィードバック結合をひとつにまとめると、？のところはどうなるでしょうか。ここにあてはまる伝達関数を「 r から y への伝達関数」といいます。また、フィードバック系の場合の特別な呼び方として「閉ループ伝達関数」とも呼ばれます。答えはつぎのようになります。



なぜこのようになるかは式を用いて説明できます。



r から y への伝達関数は

$$y = ??? r$$

の???に当てはまる伝達関数なので、 r を右辺に、 y を左辺にした上式の形式を目指して式を変形していきます。余分な変数 e や u は消去して、 r を右辺に、 y を左辺へ移項して式を変形しています。

第 5 章

システムの応答解析

教科書の 33 ページを開いてください。

5.1 伝達関数を用いた出力信号の求め方

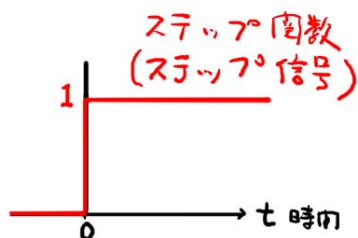
システムの出力 $y(t)$ を式で表したいとします。その求め方が図 5.1 に書いてあります。ラプラス変換とラプラス逆変換を利用しています。

教科書の 34,35 ページを開いてください。

インパルス関数という特殊な関数 $\delta(t)$ と伝達関数 $G(s)$ の関係が解説されています。

教科書の 36,37 ページを開いてください。

5.2 ステップ関数



このような関数は「ステップ関数」(信号と考える場合は「ステップ信号」と呼ばれます。制御工学でよく出てくるのでおぼえてください。時間 t の関数として書くと

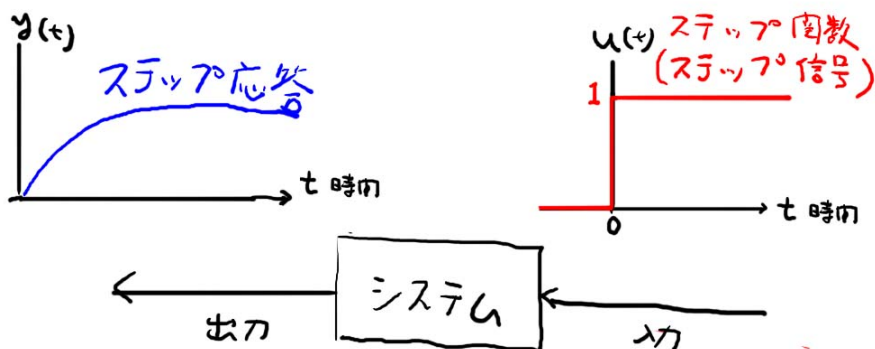
$$u(t) = 1$$

となります。これをラプラス変換すると

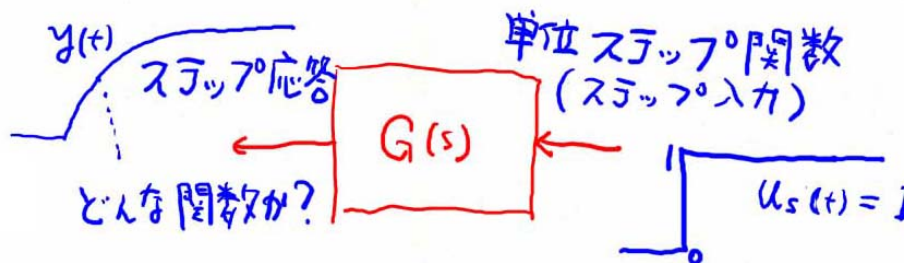
$$u(s) = \frac{1}{s}$$

となります。上のどちらもステップ関数を表している、ということをおぼえておいてください。

5.3 ステップ応答



上の図では右からステップ信号が入力され、システムの応答として左から出力が出ています。このステップ入力に応答(出力) $y(t)$ は「ステップ応答」と呼ばれます。



ステップ応答 $y(t)$ がどんな関数になるかを計算で求めることがあります。基本的な考え方は教科書の33ページにありますが、ステップ応答の場合つぎのようになります。

ステップ入力は $u(t) = 1$, ラプラス変換すると $u(s) = \frac{1}{s}$ です。 $u(s) = \frac{1}{s}$ のときの $y(s) = G(s)u(s)$ を計算します。最後に $y(s)$ をラプラス逆変換して $y(t)$ を求めます。

つぎは例題です。

$y(t) = ?$

$$\left[G(s) = \frac{6s-6}{(s+1)(s-2)} \right] \left\{ \begin{array}{l} u(t) = 1 \\ u(s) = \frac{1}{s} \end{array} \right.$$

このシステムのステップ応答を求めよ

$$y(s) = G(s)u(s)$$

$$= \frac{6s-6}{(s+1)(s-2)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(s) = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s-2} + \frac{R_3}{s}$$

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)y(s) = \left. \frac{6s-6}{(s-2)s} \right|_{s=-1}$$

$$= \frac{-6-6}{-3 \cdot (-1)} = \frac{-12}{3} = -4$$

$$R_2 = \lim_{s \rightarrow 2} (s-2)y(s) = \left. \frac{6s-6}{(s+1)s} \right|_{s=2}$$

$$= \frac{12-6}{3 \cdot 2} = \frac{6}{6} = 1$$

$$R_3 = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s) = \left. \frac{6s-6}{(s+1)(s-2)} \right|_{s=0}$$

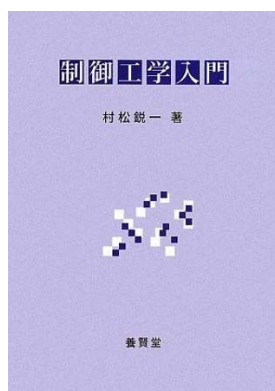
$$= \frac{-6}{-2} = 3$$

$$y(s) = \frac{-4}{s+1} + \frac{1}{s-2} + \frac{3}{s}$$

$$y(t) = -4e^{-t} + e^{2t} + 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at} \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1 \end{array} \right.$$

まず、伝達関数 $G(s)$ とステップ入力のラプラス変換 $u(s) = \frac{1}{s}$ との掛け算をします。この $y(s) = G(s)u(s)$ をラプラス逆変換すれば $y(t)$ となります。ラプラス逆変換の前に部分分数展開をして、逆変換しやすい式に変形しています。



教科書 39 ページを開いてください.

5.4 1次系・2次系の応答

ここでは代表的な伝達関数として1次系と2次系を説明します.

1次系について,

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

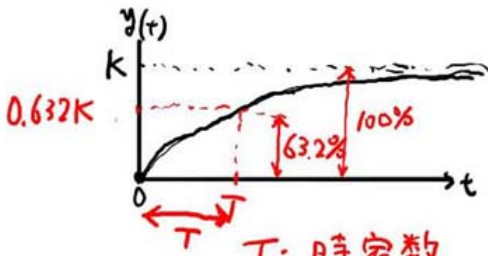
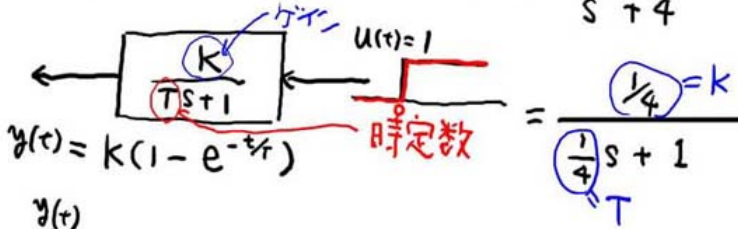
$K > 0, T > 0$

(例1)

$$G(s) = \frac{3}{2s + 1}$$

1次系のステップ応答

$$G(s) = \frac{1}{s + 4}$$



k : ゲイン
 入力1のとき
 出力の最終値は $k \times 1$ になる
 倍率 (ゲイン)

T : 時定数
 出力の最終値の63.2%まで
 達する時間
 (T が大きいほどゆっくり変化する)
 小 速く

1次系は分母が s の1次式, 分子が定数の伝達関数で表されるシステムです. ここにある定数 K はゲイン, T は時定数と呼ばれ, 図のような意味があります. 図中のグラフはステップ応答 $y(t)$ を表しています. K, T の値とステップ応答の関係を理解してください.

2次系について $k > 0 \quad \zeta > 0 \quad \omega_n > 0$

$$G(s) = \frac{k \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

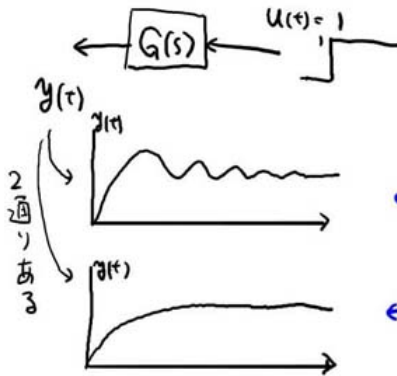
(例)

$$G(s) = \frac{5}{2s^2 + 3s + 1}$$

$$= \frac{5/2}{s^2 + 3/2 s + 1/2}$$

ゲイン $K = 5 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$$= \frac{5 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{s^2 + 2 \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} s + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$



減衰係数 ζ (げんすい)
固有角周波数 ω_n
 $\zeta < 1$ の場合
 $\zeta > 1$ の場合

1次系は分母が s の2次式、分子が定数の伝達関数で表されるシステムです。ここにある定数 K はゲイン、 ζ は減衰係数、 ω_n は固有角周波数と呼ばれます。図中のグラフはステップ応答 $y(t)$ を表していて、 ζ の値が1より小さいか大きいかで振動的になったりならなかったりします。

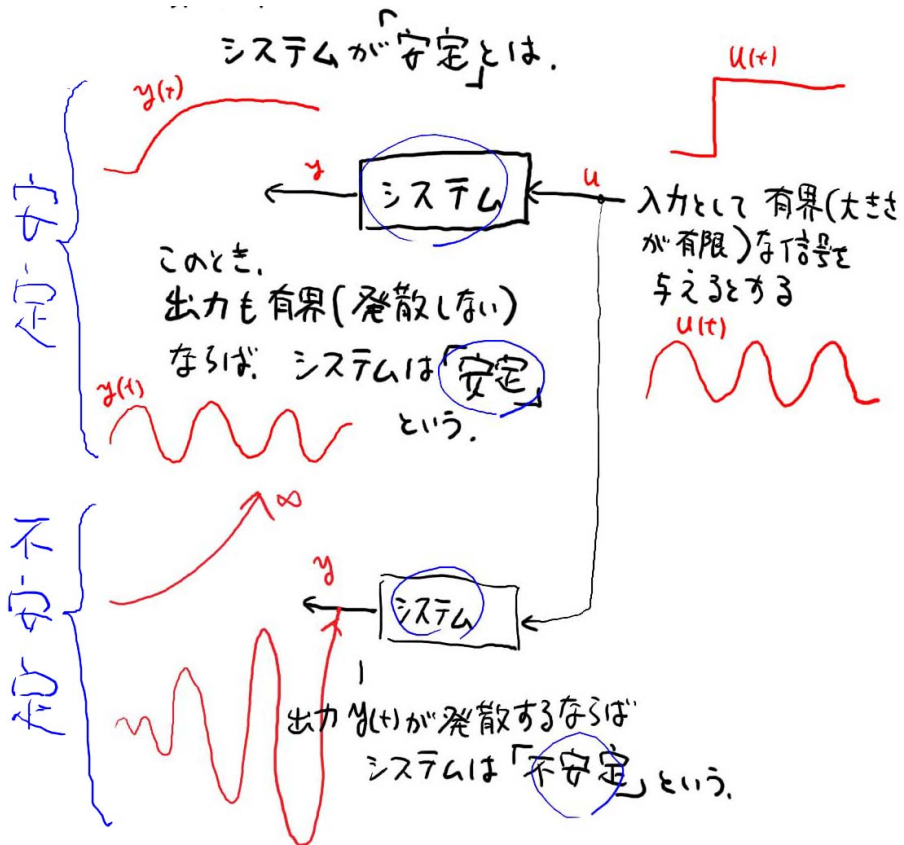
固有角周波数 ω_n の値の大小によるステップ応答の違いは教科書45ページを見てください。

第 6 章

安定性・極と応答との 関係

教科書 47 ページを開いてください.

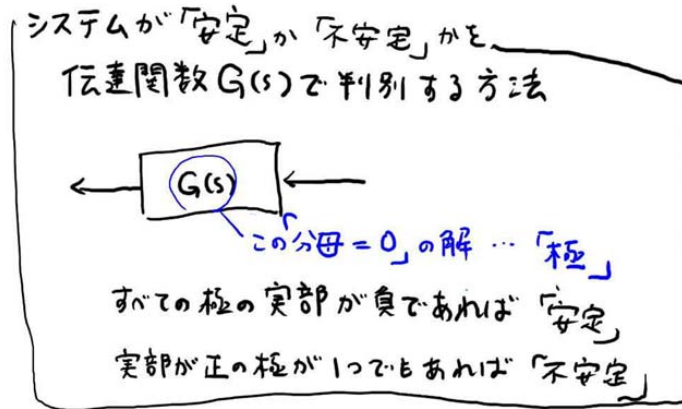
6.1 入出力システムの安定性



「システムが安定」とはどういうことかを説明しています。世の中には安定なシステムと不安定なシステムがありますが、何がどう違うのか、どういうシステムが安定なのかをつぎに説明します。

教科書 48 ページを開いてください。

6.3 極と安定性の関係



まず「極」という重要な用語があります。これは伝達関数の分母を0とおいた方程式の解です。分母が1次式なら1次方程式、分母が2次式なら2次方程式の解となります。

システムが安定か不安定かの判別は、極の実部を見ることによってできます。つぎは例題です。

つぎの伝達関数で表されるシステムは
安定か？

(1) $G(s) = \frac{2}{s+1}$ $s = -1$ 負なので安定

(2) $G(s) = \frac{s-1}{s^2+4s+13}$ $s^2+4s+13=0$ $s = -2 \pm 3j$
実部が負なので安定

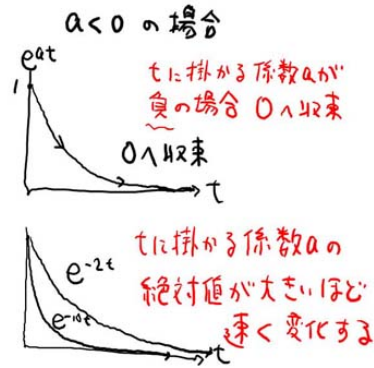
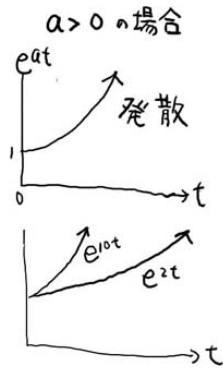
(3) $G(s) = \frac{3}{s^2-5s+6}$ $s^2-5s+6=0$ (別解) 2次方程式が解けて正なので不安定
 $s = 2, 3$

(4) $G(s) = \frac{2}{s^2-s-20}$ $s = -4, 5$
 $(s+4)(s-5)$
 s^2-s-20
正の極があるので不安定

極と安定性の関係は教科書 50 ページに書かれていますが、この資料の 22 ページの例題でも理解できると思います。

指数関数の性質

e^{at} t は時間, a は定数



まず指数関数の性質を思い出してください。つぎに，以前用いたステップ応答の例で極と安定性の関係を説明します。

0の解は -1 と 2
負 正

ステップ応答 $y(t)$ の式を求めよ。

$$y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{6s-6}{(s+1)(s-2)s}$$

$$= \frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{s-2} + \frac{r_3}{s}$$

$$r_1 = (s+1)y(s) \Big|_{s=-1} = \frac{6s-6}{(s-2)s} \Big|_{s=-1} = \frac{-6-6}{-3 \cdot (-1)} = -4$$

$$r_2 = (s-2)y(s) \Big|_{s=2} = \frac{6s-6}{(s+1)s} \Big|_{s=2} = \frac{12-6}{3 \cdot 2} = 1$$

$$r_3 = s y(s) \Big|_{s=0} = \frac{6s-6}{(s+1)(s-2)} \Big|_{s=0} = \frac{0-6}{1 \cdot (-2)} = 3$$

$$y(s) = \frac{-4}{s+1} + \frac{1}{s-2} + \frac{3}{s}$$

$$y(t) = -4e^{-t} + e^{2t} + 3$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$

システムは「不安定」
不安定の原因は 2

この資料の 22 ページの例題ではステップ応答が $y(t) = -4e^{-t} + e^{2t} + 3$ となります。時間 t が経過すると (t の値が大きくなると) この $y(t)$ の値がどうなるかを考えます。第 2 項の e^{2t} の値がすごく大きな値になっていくので、 $y(t)$ は発散し、 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$ となります。すなわち、この例題のシステムは「不安定」です。

このシステムが不安定である原因は e^{2t} の 2 という正の値です。これがどこから出てきたのかをさかのぼると、伝達関数 $G(s)$ の分母の $(s-2)$ の 2 が原因です。これは極 (-1 と 2) のうち正の極 2 です。

このように正の極があるシステムは不安定です。逆にすべ

ての極が負ならば $y(t)$ は発散せず、システムは「安定」といえます。一般には極は複素数もありえて、すべての極の実部が負であることがシステムが安定であること条件となります。

教科書 51 ページを開いてください。

6.4 安定な多項式

「安定な」という言葉を制御工学ではよく使います。その使い方をここを読んで覚えておいてください。

6.5 ラウスの方法

システムが安定かどうかを調べるには、極を求める、すなわち分母 = 0 の方程式の解を求めなければならない、とすると分母が 3 次式や 4 次式になると解を求めるのが困難になります。

そこで考え出されたのが「ラウスの方法」です。

教科書 52 ページを開いてください。

教科書の 52 ページに一般的な説明があります。(1) と (2) の 2 段階であることに注意してください。

教科書 53 ページを開いてください。

教科書の 53 ページに例があります。(1) では係数が 1, 5, 10, 10, 4 ですべて正であることをチェックしています。(2) でラウス表をつくっています。この作り方がわかりますでしょうか？

もう少し簡単な別の例題で説明します。

つぎの伝達関数で表されるシステムは
安定か？

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 8s + 12}$$

(1) 係数はすべて正。

(2) ラウス表をつくる

行列式

$$-\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}(12 - 32) = -\frac{1}{4}(-20) = 5$$

$$-\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}(0 - 60) = 12$$

最も左の列が
すべて正なので安定。

このようにして分母が3次以上の場合、ラウスの方法で安定性を判別します。

教科書 54 ページを開いてください。

6.5.1 2 次の場合の安定条件

例えば

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}$$

のシステムが安定かどうかを調べたいときは、分母=0の方程式が2次方程式となり、2次方程式の解の公式を使えば極

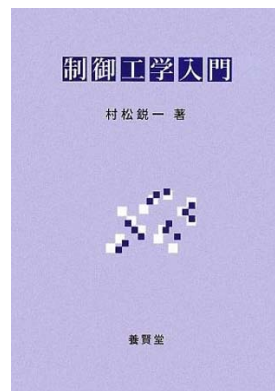
を求めることができ、その実部を見れば安定かどうかわかります。

しかし、もっと簡単な方法があります。分母が 2 次式の場合、その係数を見ます。上の例の場合、1, 4, 3 です。これら「係数がすべて正」ならば「システムは安定」と判別できます。したがって上の例の場合、安定です。

この方法が使えるのは分母が 2 次式の場合に限定されます。3 次以上の場合には前節で述べたようにラウスの方法を使わなければなりません。

第7章

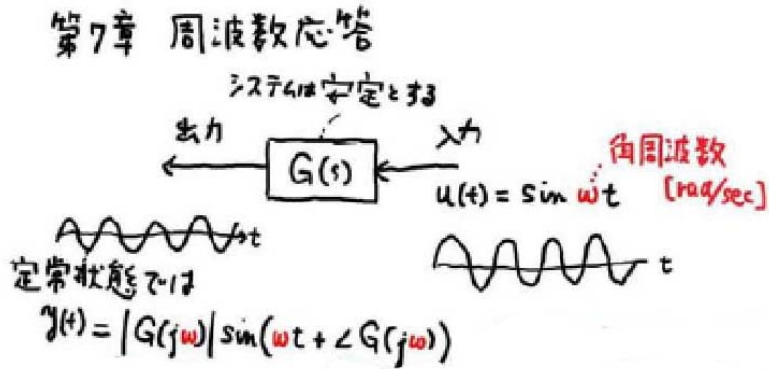
周波数応答



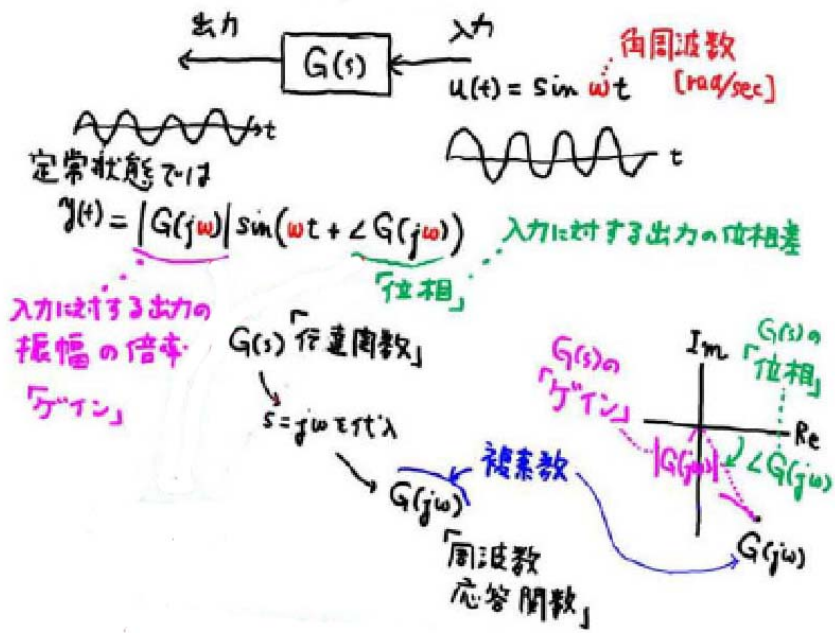
教科書 58 ページを開いてください。

7.1 正弦波入力に対する応答

この章では入力が正弦波の場合のシステムの応答について考えます。システムは安定であるとします。



まず重要な性質として、入力が正弦波の場合、出力も正弦波になります。入力の角周波数が ω なら出力の角周波数の ω になります。詳細な説明は教科書の 59,60 ページを見てください。



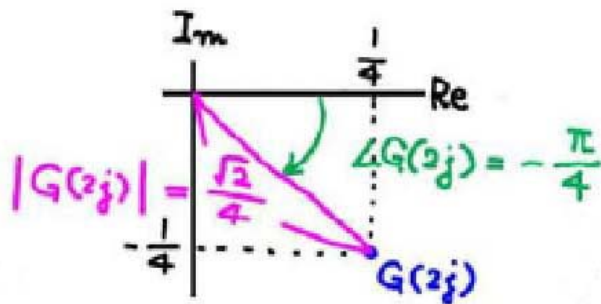
角周波数 ω は変わりませんが、出力の振幅と位相は入力と異なるものになります。振幅は $|G(j\omega)|$ が掛かり、位相は $\angle G(j\omega)$ が加わります。 $|G(j\omega)|$ は「ゲイン」、 $\angle G(j\omega)$ は「位相」と呼ばれます。

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \text{ の場合}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega+2} \leftarrow \text{複素数}$$

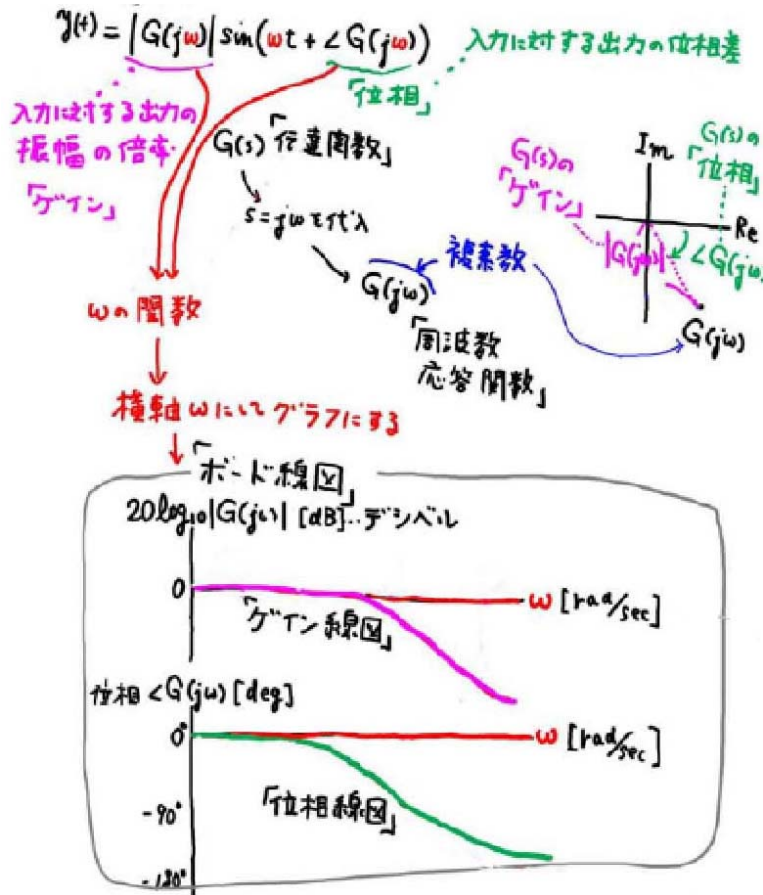
$$\omega = 2 \text{ の場合}$$

$$G(2j) = \frac{1}{2j+2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}j$$



$G(j\omega)$ は複素数, $|G(j\omega)|$, $\angle G(j\omega)$ は実数です. 上は一つの例です.

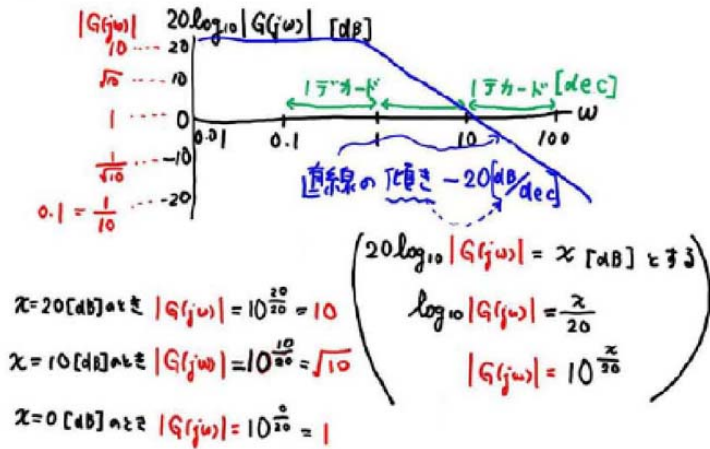
7.2 周波数応答関数



$G(j\omega)$ は「周波数応答関数」とよばれます。その大きさと位相に対応するゲイン $|G(j\omega)|$ ，位相 $\angle G(j\omega)$ はシステムの特性を表す重要な値です。これらの値は入力の角周波数 ω によって変わります。その変わり方をグラフによって表現したのが「ボード線図」です。上側が「ゲイン線図」，下側が「位相線図」です。

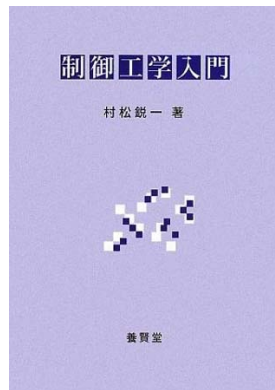
ゲイン線図の軸の目盛り

「ゲイン線図」では縦軸・横軸ともに目盛りのとり方が独特なので注意が必要です。



ボード線図の目盛りのとり方に特徴があります。上の図はボード線図の上側「ゲイン線図」の目盛りのとり方です。縦軸は $|G(j\omega)|$ のゲインに対して $20 \log_{10}$ をとります。横軸は 10 倍を等間隔にした目盛りをとります。10 倍の間隔を 1 [dec] (デカード) と呼びます。

以上の説明は教科書の 62,63 ページにも詳しく書かれています。



教科書 64 ~ 70 ページを見てください。

第7章は少し難しくて内容も盛りだくさんです。教科書をしっかり読んで学んでください。

7.3 ボード線図

ボード線図に描かれるグラフがどのような曲線（あるいは直線）なるかは、システムの伝達関数 $G(s)$ によって決まります。代表的な伝達関数について、それぞれどのようなボード線図になるかが示されています。

一次系、二次系のボード線図には、伝達関数のパラメータとの関連があることに注意してください。

ゲイン K が 1 の一次系の伝達関数は

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

です。ここに現れているパラメータ T の大小がボード線図にどのような違いをもたらすかが図 7.9 に見られます。

ゲイン K が 1 の二次系の伝達関数は

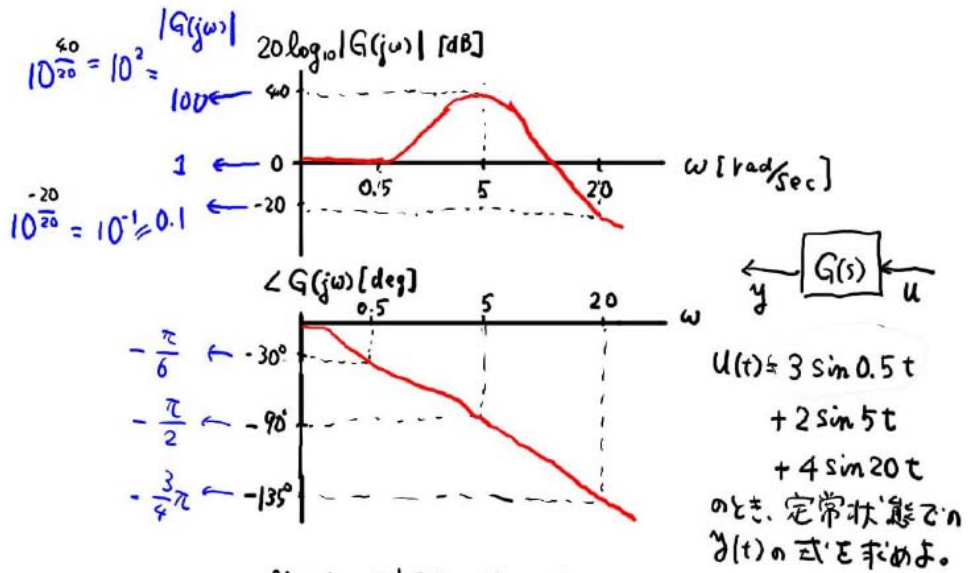
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

です。ここに現れているパラメータ ζ , ω_n の大小がボード線図にどのような違いをもたらすかが図 7.11 と図 7.12 に見られます。

教科書 70 ページを見てください。

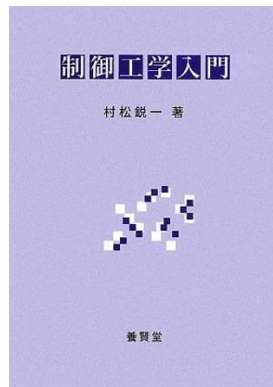
7.4 ボード線図を見てわかること

ボード線図を見て何がわかるかが書いてあります。つぎの例題はそれに関するものです。



$$\begin{aligned}
 y(t) &= 3 |G(0.5j)| \sin(0.5t + \angle G(0.5j)) \\
 &\quad + 2 |G(5j)| \sin(5t + \angle G(5j)) \\
 &\quad + 4 |G(20j)| \sin(20t + \angle G(20j)) \\
 &= 3 \times 1 \times \sin\left(0.5t - \frac{\pi}{6}\right) \\
 &\quad + 2 \times 100 \times \sin\left(5t - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &\quad + 4 \times 0.1 \times \sin\left(20t - \frac{3\pi}{4}\right)
 \end{aligned}$$

このようにボード線図を読み取ることにより、出力がどんな信号になるかが予想できます。



教科書 71 ページを開いてください。

7.5 ボード線図の概形

7.5.1 直列結合系のボード線図

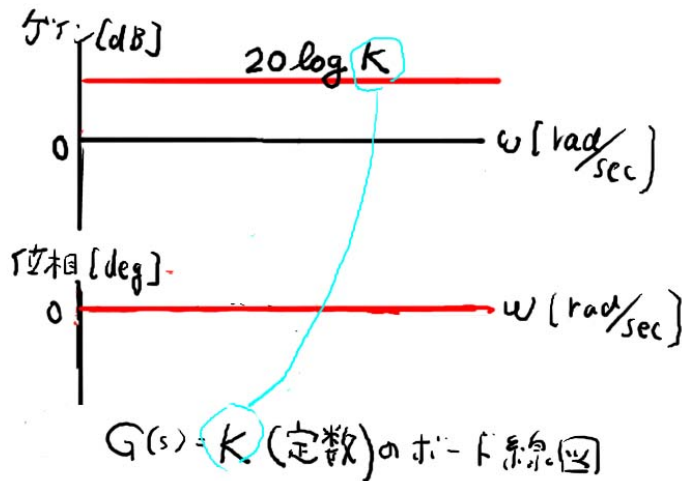
ここは教科書 73 ページの準備です。「積で表される伝達関数 $G_1(s)G_2(s)$ のボード線図は、 $G_1(s)$ のボード線図と $G_2(s)$ のボード線図の和になる」という性質があります。

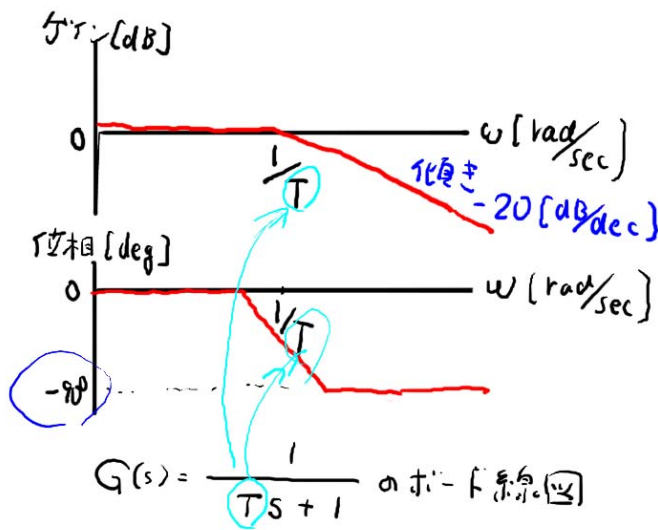
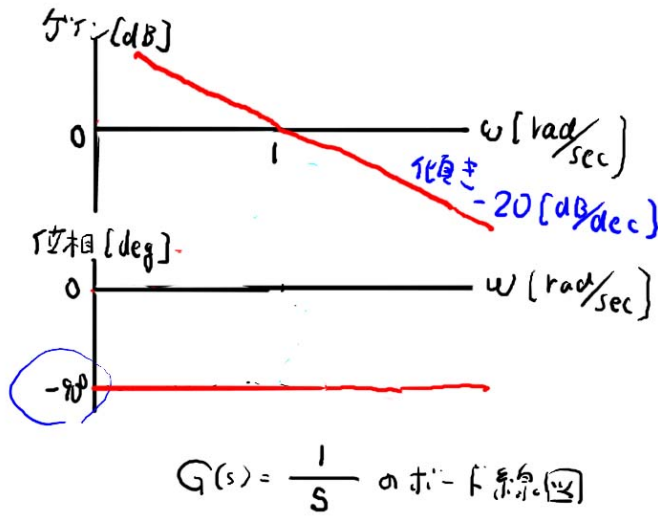
教科書 72, 73 ページを開いてください。

7.5.2 ボード線図の折れ線近似

教科書の 64 ~ 70 ページにいろいろな伝達関数に対するボード線図がありますが、これらをより簡単化して、折れ線で近似することがあります。これによりパソコンのソフトウェアを使わなくても、手書きですぐにボード線図が描けるようになります。

教科書にも図がありますが、よく使うのはつぎの3つです。





教科書 73 ページを開いてください。

上の3つを組み合わせると、 $G(s) = \frac{10}{s(0.2s+1)}$ のボード線図を図7.21のようにかくことができます。 $G(s)$ を $G_1(s) = 10$, $G_2(s) = \frac{1}{s}$, $G_3(s) = \frac{1}{0.2s+1}$ の3つの積と見なして、 $G(s)$ のボード線図は3つのボード線図の和でかいています。ゲインの傾きも和になります。 -20 と -20 の和で -40 になるところがあります。

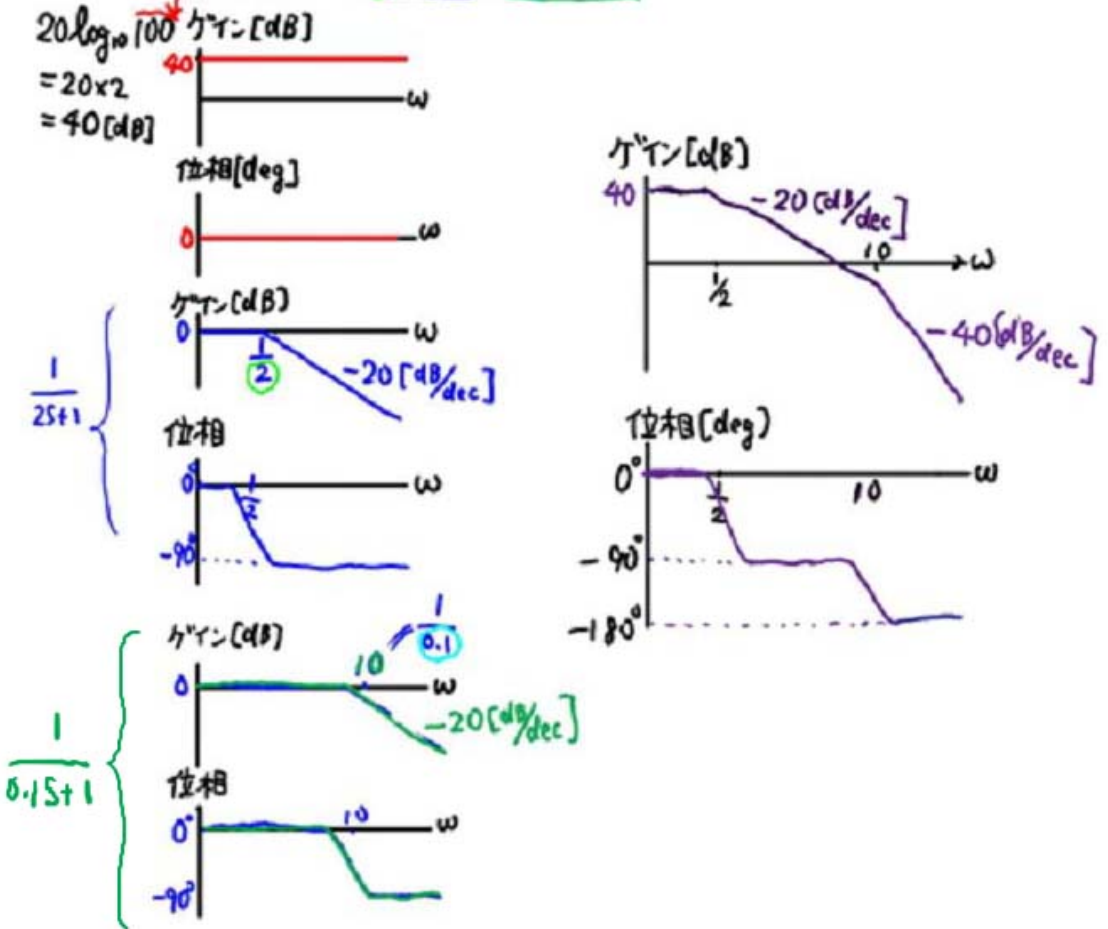
つぎの例題で理解を深めてください。

$$G(s) = \frac{100}{(2s+1)(0.1s+1)}$$

のボード線図の
根形も

折れ線近似で描け

$$G(s) = 100 \cdot \frac{1}{2s+1} \cdot \frac{1}{0.1s+1}$$



教科書 74 ページを開いてください。

伝達関数の「分母=0」の解を「極」と呼んでいました。伝達関数の「分子=0」の解を「零点」と呼びます。すべての零点の実部が負であるようなシステムは最小位相系と呼ばれます。最小位相系ではゲインと位相の間に教科書 74 ページに書

いてあるような関係があります。

教科書 75 ページを開いてください。

7.6 ベクトル軌跡

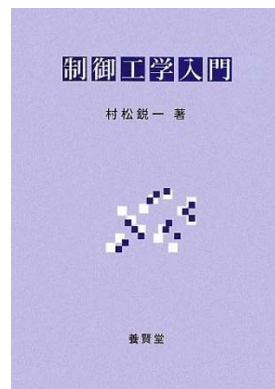
$G(j\omega)$ を図で表現する方法として、ボード線図のほかに「ベクトル軌跡」というものもあります。 $G(j\omega)$ の ω を 0 から ∞ に変えるといろいろな複素数になります。これを複素平面上でプロットすると軌跡になります。

教科書 76,77 ページを開いてください。

1次系，2次系など代表的な伝達関数のベクトル軌跡が示されています。

第 8 章

フィードバック系の安定性



教科書 79 ページを開いてください。

8.1 コントローラの設計と制御系の応答

これまでは一つのシステムに注目してその特性を調べる方法を学んできましたが，ここからは制御対象とコントローラからなるフィードバック制御系について考えます。

制御対象が与えられているとします。 $G(s)$ がどんな伝達関数かはすでに決まっているとします。ここでコントローラ $K(s)$ を設計することにします。 $K(s)$ をどんな式にするかでフィードバック系の挙動が大きく変わります。

教科書 80 ページを開いてください。

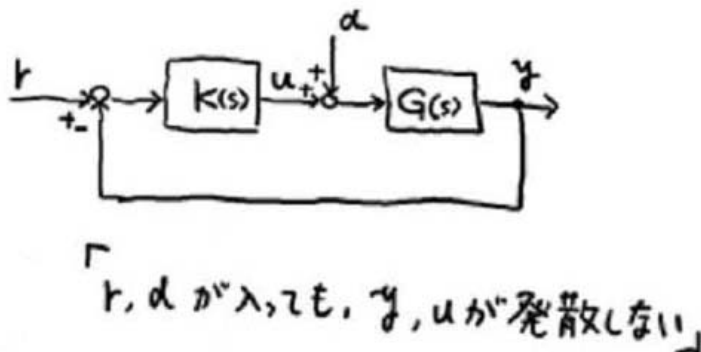
ある $K(s)$ を用いると出力 $y(t)$ が発散し、別の $K(s)$ を使うと発散せずにある値に収束する様子が図に示されています。

教科書 81 ページを開いてください。

制御系に望まれる性質が書かれています。「安定」であること、すなわち信号が発散しないことが第一に望まれます。

ところで「フィードバック制御系が安定である」とはどのようなことでしょうか。第5章で学んだのは「 $G(s)$ で表されるある一つのシステムが安定」ということでした。今考えているのは「 $G(s)$ と $K(s)$ からなるフィードバック制御系が安定」とはどのようなことかです。

おおまかにいえば「システムが安定」とは「外から入力に加わってもシステムの出力が発散しない」ということです。フィードバック系にこの考え方を適用するとつぎのようになります。



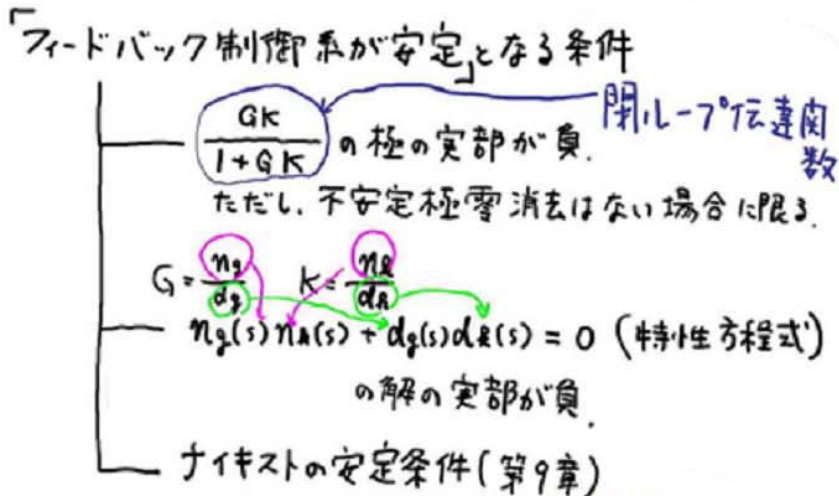
教科書 85 ページを開いてください。

教科書 83 ページにより厳密な記述があります。

フィードバック制御系が安定となるかは、 $G(s)$ に対してどんな $K(s)$ を設定したか、すなわち $G(s)$ と $K(s)$ のペアに

よって決まります。それでは $G(s)$ と $K(s)$ がどんな条件を満たせば安定となるでしょうか。

その条件にはつぎのように3種類の表現があります。



3つありますが、どれもテーマは同じで制御系が安定となる条件です。

1つめの $\frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)}$ を考えるものは、フィードバック制御系の伝達関数が、教科書の31ページのように $\frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)}$ で表されることに由来しています。この伝達関数の極の実部が負であればフィードバック制御系が安定であるといえそうです。ただし、注意が必要なところがあり、「不安定極零消去がない」ということをチェックしなければいけません。これに関しては教科書82~83ページと86ページの例2を読むとわかります。

2つめの特性方程式を用いる方法が簡潔で使いやすいです。伝達関数の分子と分母から特性方程式をつくり、この解の実部が負になることが制御系の安定条件となります。

3つめのナイキストの安定条件は第9章で学びます。

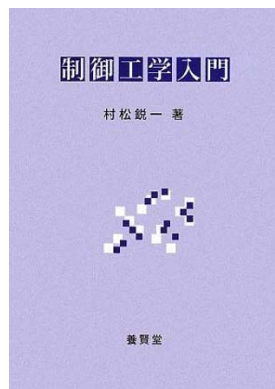
教科書85ページを開いてください。

2つめの特性方程式による安定条件が四角で囲われたところに書かれています。この方程式が出てくる過程は教科書84~85ページに書かれています。特性方程式の具体例は86

ページに書かれています。分子と分母から方程式をつくるだけなので簡単だと思います。

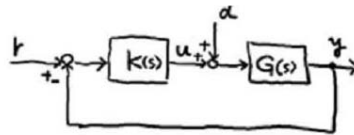
第9章

ナイキストの安定判別法



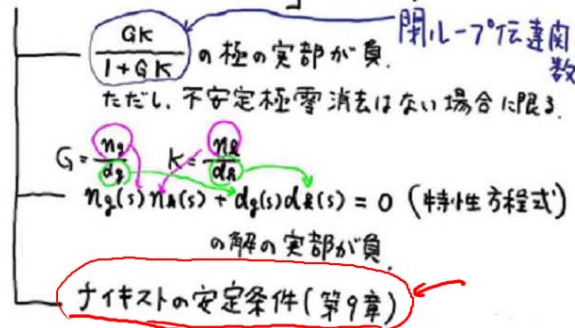
教科書 88 ページを開いてください。

9.1 開ループ伝達関数による閉ループ系の安定判別



「 r, d が入ると、 y, u が発散しない」

「フィードバック制御系が安定」となる条件



先週に引き続きフィードバック系の安定条件を考えます。今日は3つめのナイキストの安定条件です。

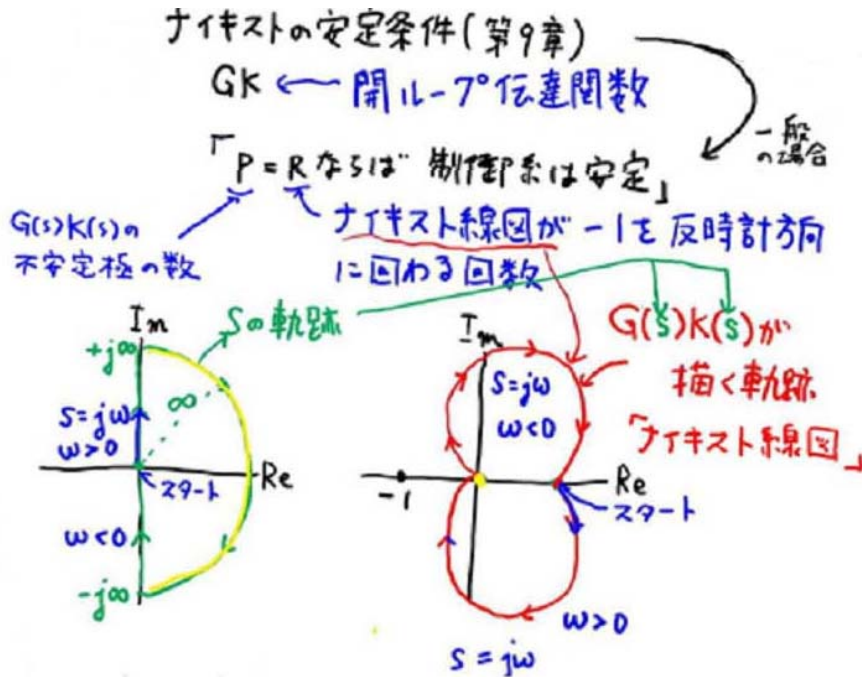
考察の対象は上の図のようなフィードバック制御系ですが、ナイキストの安定条件には「開ループ伝達関数」が関係します。

教科書 89 ページを開いてください。

「開ループ伝達関数」は式で書くととても簡単で $G(s)K(s)$ です。その名前の由来は教科書を読んでください。

ナイキストの安定条件の特徴は、この簡単な式 $G(s)K(s)$ を使うことです。式は簡単ですが、それに関連した「ナイキスト線図」というものが少し複雑です。

9.2 ナイキスト線図



制御対象 $G(s)$ が与えられ、あるコントローラ $K(s)$ を設計したとします。これらからなるフィードバック制御系が安定かどうかを調べたいとします。

ここで $G(s)K(s)$ を使って考えていきます。まず $G(s)K(s)$ の不安定極（実部が正の極）の数を求め、その数を P とします。

つぎに R を求めます。それには「ナイキスト線図」が必要です。まず複素数 s を左の図のように軌跡をえがくように値を変えていきます。その s に対して $G(s)K(s)$ が描く軌跡が複素数平面上の「ナイキスト線図」です。

これが -1 を反時計方向に回る回数を R とします。先ほど求めた P と R が等しければ制御系は安定と判別されます。

教科書 90,91 ページを開いてください。

ナイキスト線図は第7章で学んだベクトル軌跡とよく似て

います。91 ページに書いてあるように、ナイキスト線図は、 $G(s)K(s)$ のベクトル軌跡を実軸に関して上下対象に描いたものと一致します。

9.3 ナイキストの安定判別

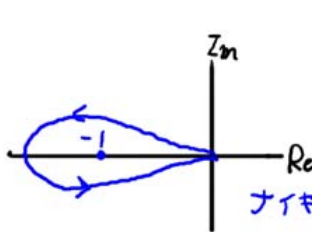
教科書 92,93 ページを開いてください。

$G(s) = \frac{3}{s+3}$, $K(s) = \frac{3}{s-2}$

異なるフィードバック制御系は安定か?

$G(s)k(s) = \frac{9}{(s+3)(s-2)}$

$= 0$ 極は -3 と 2



実部が正の極の数は
 1 個なので $P=1$.

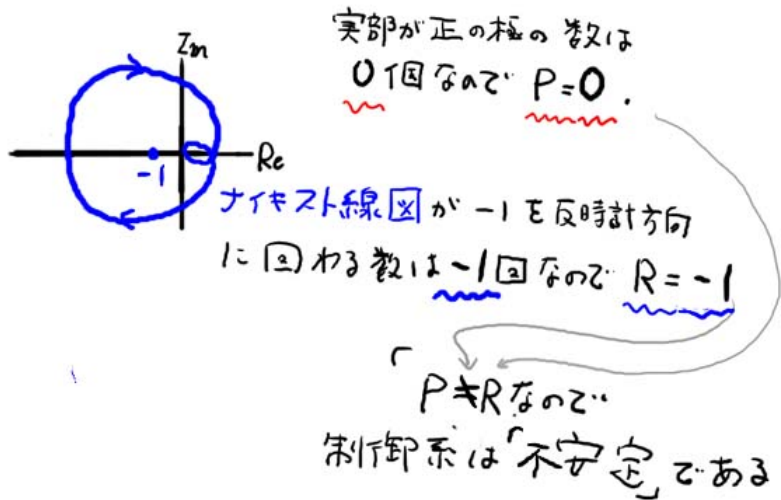
ナイキスト線図が -1 を反時計方向
 に回る数は 1 回なので $R=1$

$P=R$ なので
 制御系は「安定」である

92 ページの例の場合、上のように「安定」と判別されます。

$G(s) = \frac{s-3}{s+1}$, $K(s) = \frac{2}{s+1}$ からなるフィードバック制御系は安定か?

$G(s)k(s) = \frac{2(s-3)}{(s+1)^2} = 0$ 極は -1



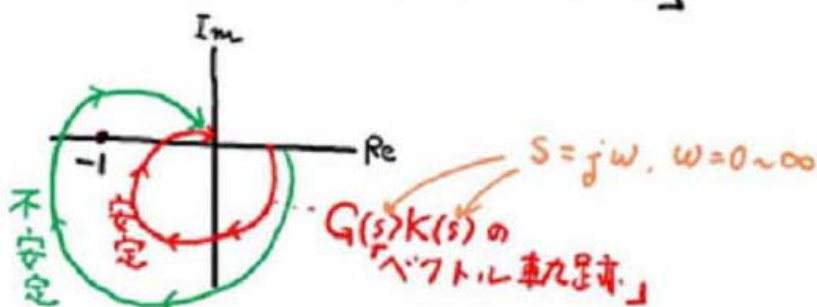
93 ページの例の場合、上のように「不安定」と判別されます。この例で注意してほしいのは R の値が -1 になっているところです。 R は反時計方向に回る数を正とし、時計方向に回る数を負とします。上の場合、時計方向に 1 回まわっているので -1 となります。

教科書 94 ページを開いてください。

9.4 開ループ伝達関数が安定な場合

$G(s)K(s)$ が安定な伝達関数の場合

↓
 $G(s)K(s)$ のベクトル軌跡が
 -1 を左に見て通れば「制御系は安定」

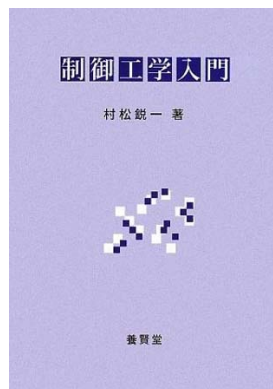


「 $G(s)K(s)$ が安定」とは $G(s)K(s)$ のすべての極の実部が負であることを意味します。 $G(s)K(s)$ が安定のとき制御系も安定とは限りません。

この場合においてナイキストの安定判別法を適用すると $P = 0$ となり、安定である条件は $R = 0$ となります。この条件をベクトル軌跡を用いて表すと上のようになります。複素数平面上で点 -1 を左に見て通ることが制御系の安定条件となります。

第 10 章

安定余裕と感度関数



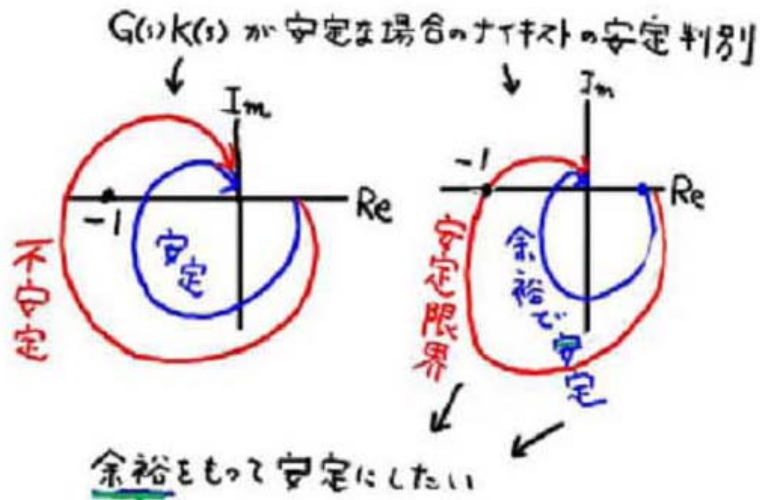
教科書 98 ページを開いてください。

10.1 安定余裕

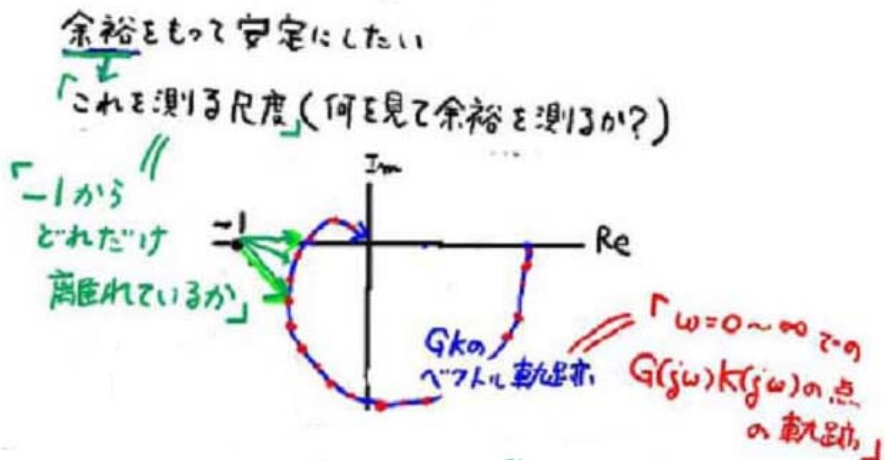
制御系にとって安定であることは最重要事項で、ぎりぎり安定ではなく余裕をもって安定であることが求められます。

今日は制御系の「余裕」とはということから話を始めていきます。最初はベクトル軌跡を使って余裕を定義しますが、後にそれがボード線図と関連を持つことがわかってきます。

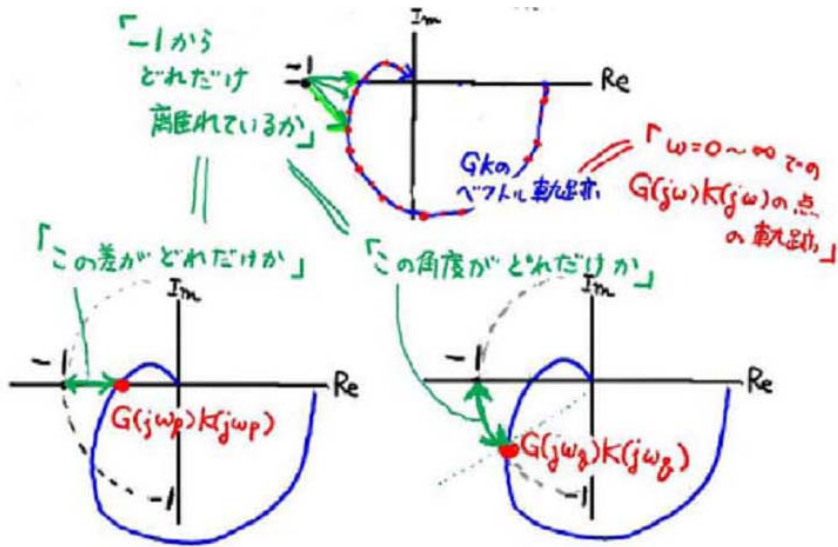
安定余裕 { ゲイン余裕
位相余裕 } 1 について



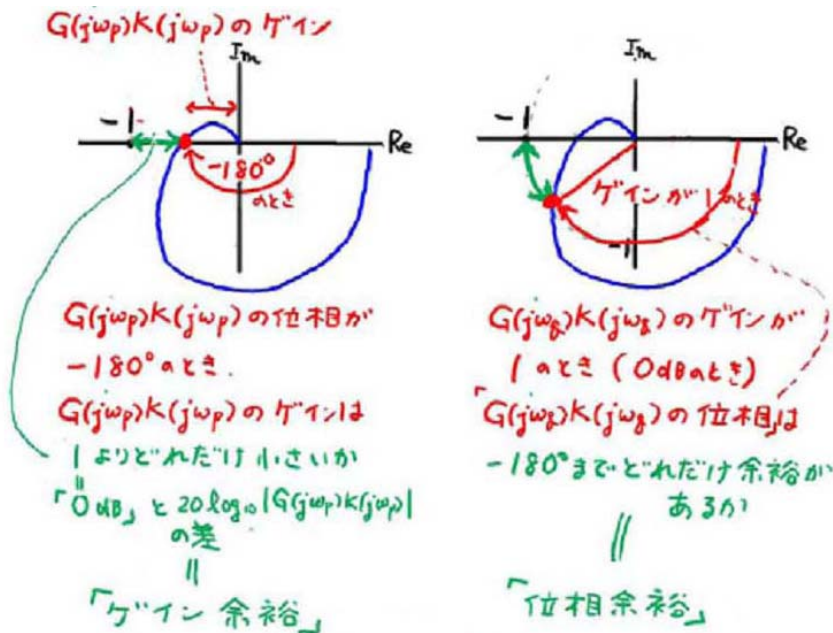
前回の「ナイキストの安定判別法」で開ループ伝達関数が安定の場合、「ベクトル軌跡が -1 を左に見て通れば制御系は安定」ということを学びました。上の図の左がその内容です。余裕ということを考えると右の図のようになります。 -1 という点から離れているほど余裕があります。



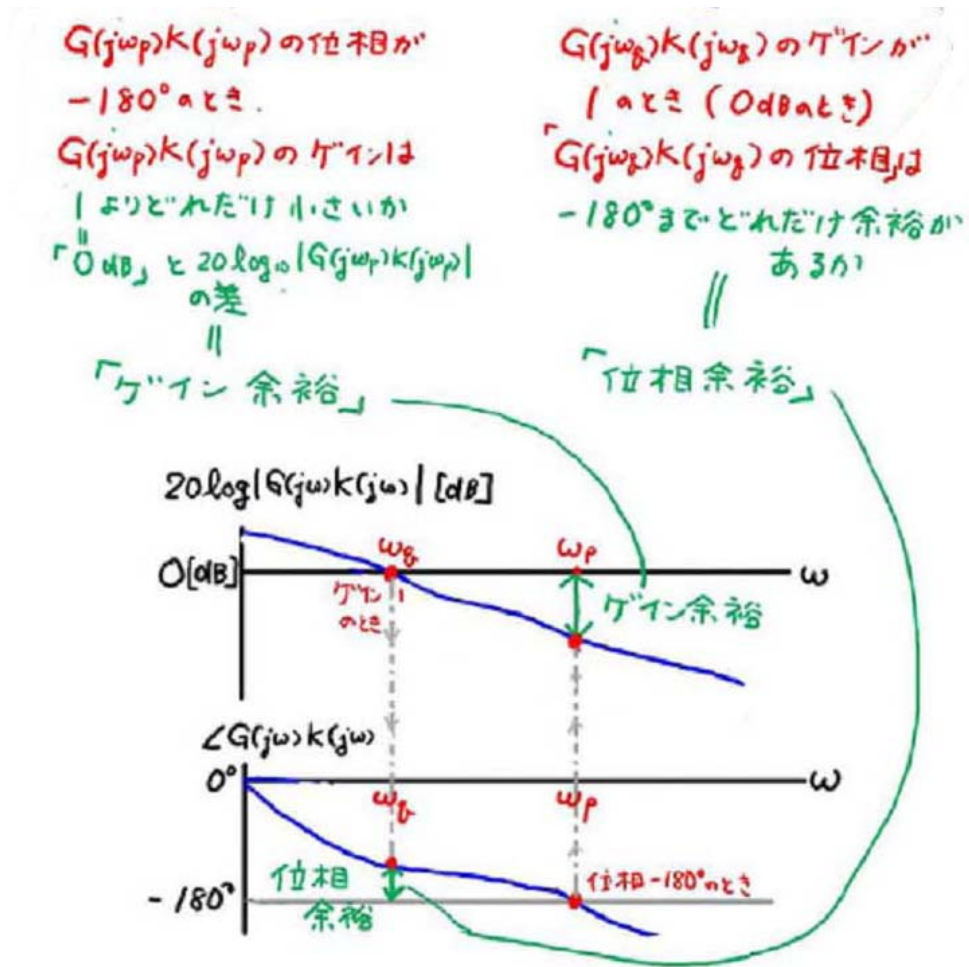
-1 からどれだけ離れているかをきちんと定量化したいとき、つぎのような考え方があります。



-1 からの離れ度合の測り方として、上の図には二通りの部分に注目しています。



上の図の左側は位相が 180° になるときのゲインに注目した「ゲイン余裕」、右側はゲインが 1 になるときの位相に注目した「位相余裕」と呼ばれるものです。これがゲイン余裕と位相余裕の定義です。

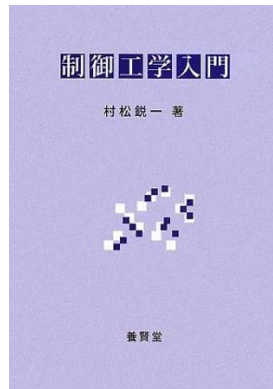


ゲイン余裕と位相余裕の定義に基づけば、それらはボード線図の上でも表すことができます。

教科書 100,101 ページを見てください。

教科書ではゲイン余裕が「 $-20\log_{10} \overline{OP}$ 」、位相余裕が「 $\angle QOP$ 」として定義されています。図 10.3 に基づいています。

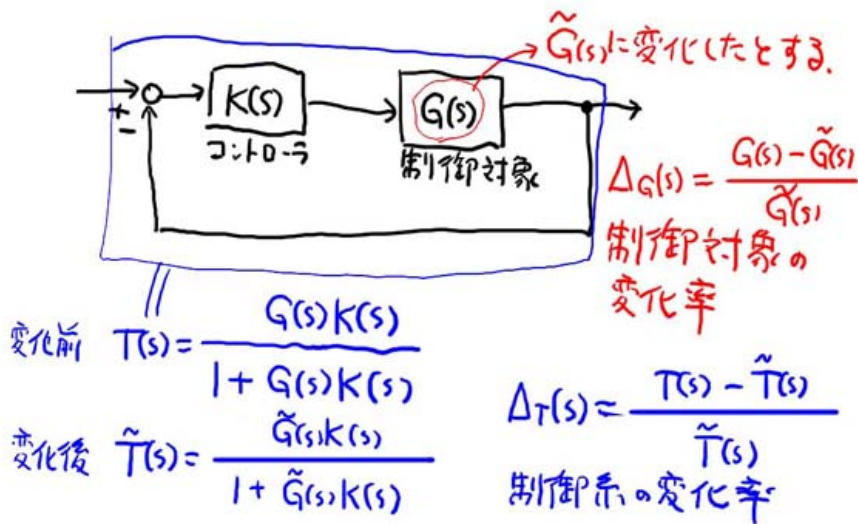
101 ページではボード線図におけるゲイン余裕と位相余裕が説明されています。



教科書 102 ページを見てください。

10.2 感度関数

感度関数



例えばモータを制御したいとします。モータの伝達関数 $G(s)$ を求めるとともに、それに対して有効なコントローラ $K(s)$ も求められたとします。そして上の図のようにフィードバック制御してモータの回転速度を制御しているとします。

ずっとモータを回転させていると熱を帯びてきて、モータの特性が変化してきたとします。その変化によりモータの伝

達関数も変化し、最初は $G(s)$ だったのですが $\tilde{G}(s)$ に変化したとします。

制御しているコントローラ $K(s)$ は $G(s)$ に対しては有効ですが、変化後の $\tilde{G}(s)$ に対しては有効であるとは限りません。それによって制御系の特性にも変化が生じます。

制御系の特性は閉ループ伝達関数で表されます。変化前は $T(s) = \frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)}$ 、変化後は $\tilde{T}(s) = \frac{\tilde{G}(s)K(s)}{1+\tilde{G}(s)K(s)}$ です。

変化前後の制御対象の変化率 $\Delta_G(s)$ を $\Delta_G(s) = \frac{G(s)-\tilde{G}(s)}{\tilde{G}(s)}$ とします。変化前後の制御系の変化率 $\Delta_T(s)$ を $\Delta_T(s) = \frac{T(s)-\tilde{T}(s)}{\tilde{T}(s)}$ とします。これら $\Delta_G(s)$ と $\Delta_T(s)$ の間にはつぎの関係があります。

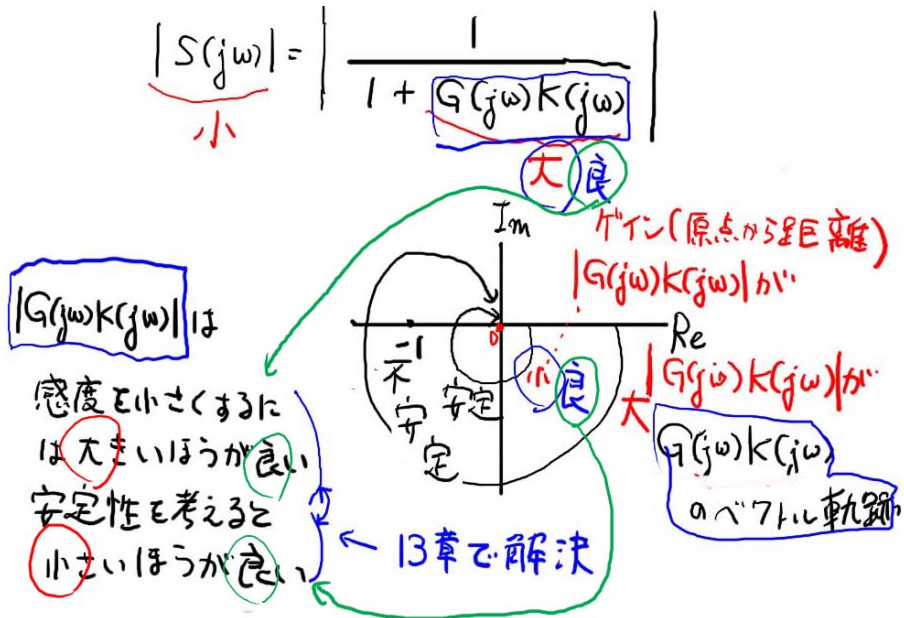
$$\Delta_T(s) = \frac{1}{1+G(s)K(s)} \Delta_G(s)$$

" $S(s)$: 感度関数
大きさが小さいほどよい
 $|S(j\omega)|$

教科書 103 ページを見てください。

ここに現れた $S(s)$ は「感度関数」と呼ばれます。制御系の変化率 Δ_T は小さいほうが良いので、感度関数の大きさは小さいほうが良いということになります。

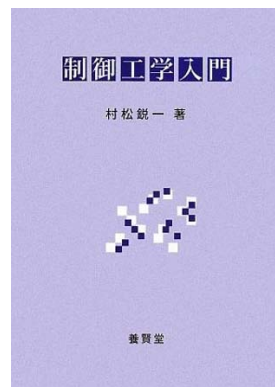
10.3 安定余裕と感度特性



図の上部をご覧ください。「 S は小さいほうが良い」ということは「 GK は大きいほうが良い」ということを意味します。いったん感度関数から離れて、ナイキストの安定判別法を考えてみましょう。安定であるためには、 GK は大きな軌跡をえがくよりも小さな軌跡をえがくほうが良いことになります。図の左下をご覧ください。 GK の大きさについては、感度を考えれば大きいほうが良く、安定性を考えれば小さいほうが良い、という相反する要望が存在します。このジレンマをどう解決するかは第 13 章で学びます。

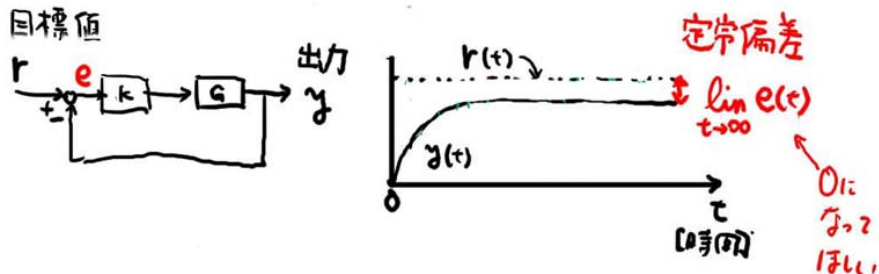
第 11 章

定常特性・過渡特性・周波数特性



教科書 106 ページを開いてください。

11.1 定常偏差



フィードバック制御系の偏差 e に注目します。目標値に出力が一致してほしいので e は 0 になることが望まれます。制御してみると偏差 $e(t)$ がなかなか 0 にならないことがあります。いつまでたっても 0 にならない偏差があるとき、「定常偏差がある」ということになります。

定常偏差をなくすにはどうすればよいかを説明します。目標値は 1、すなわちステップ信号とします。

定常偏差を 0 にするには

$r(t) = 1$ の場合

$r(s) = \frac{1}{s}$

(目標値と y が一致する)

$K(s)$

$\frac{1}{s} \cdot \frac{3}{s+2}$

$G(s)$

$G(s)K(s)$

ラプラス変換の最終値定理

理由

積分器 (1/s) を含めると定常偏差は 0 になる

→ 理由

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s)$$

(定常偏差)

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)K(s)} r(s) = \frac{1}{s}$$

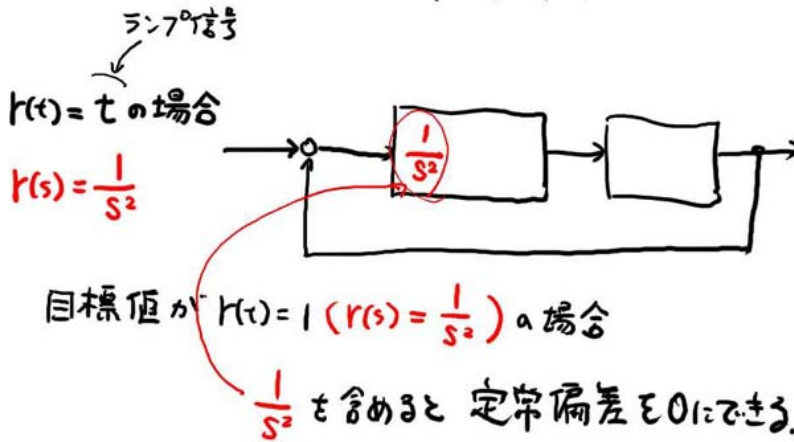
$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)K(s)}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{s} \cdot \frac{3}{s+2} G(s)}$$

$$= \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

演習より

結論から言うと、目標値がステップ信号の場合、そのラプラス変換 $\frac{1}{s}$ をコントローラの中に入れて定常偏差が 0 になります。その理由は上の図の中に書いてあります。ラプラス変換の最終値の定理は教科書の 17 ページの (2.28) 式にもあります。途中の $e(s)$ の式の導出は今週の課題として出題しておきます。



一般に

「目標値 $r(t)$ のラプラス変換 $r(s)$ と同じ伝達関数
 を $G(s)K(s)$ に含めれば、定常偏差は 0 になる」
 開ループ伝達関数 ↑ 内部モデル原理

目標値がランプ信号 ($r(t) = t$) の場合も同じようにして定常偏差を 0 にできます。目標値のラプラス変換 $\frac{1}{s^2}$ をコントローラに含めます。

一般には、目標値のラプラス変換と同じ伝達関数を $G(s)K(s)$ を含めれば定常偏差は 0 になります。

11.2 制御系の過渡特性

教科書 113 ページを開いてください。

図 11.3 を見てください。制御している状況での出力 $y(t)$ がこのような波形になったとします。制御の良し悪しを評価するとき、波形の何を見て評価するかが書いてあります。

教科書 114 ページを開いてください。

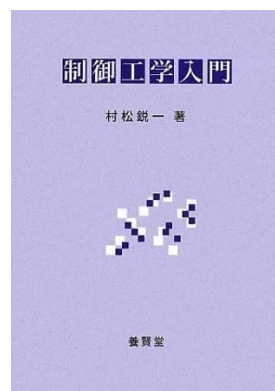
フィードバック制御系の特性を知るために、閉ループ伝達関数 $T(s) = \frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)}$ のボード線図を調べることがあります。

$$y(s) = T(s)r(s)$$

の関係があり、目標値 r に対して出力 y が一致するには $T(s) = 1$ であることが理想ですが、 $T(s) = \frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)}$ を 1 に一致させることはなかなか困難です。 $T(s)$ のボード線図を描いたとき、どういうところを評価すればよいかが教科書に書いてあります。

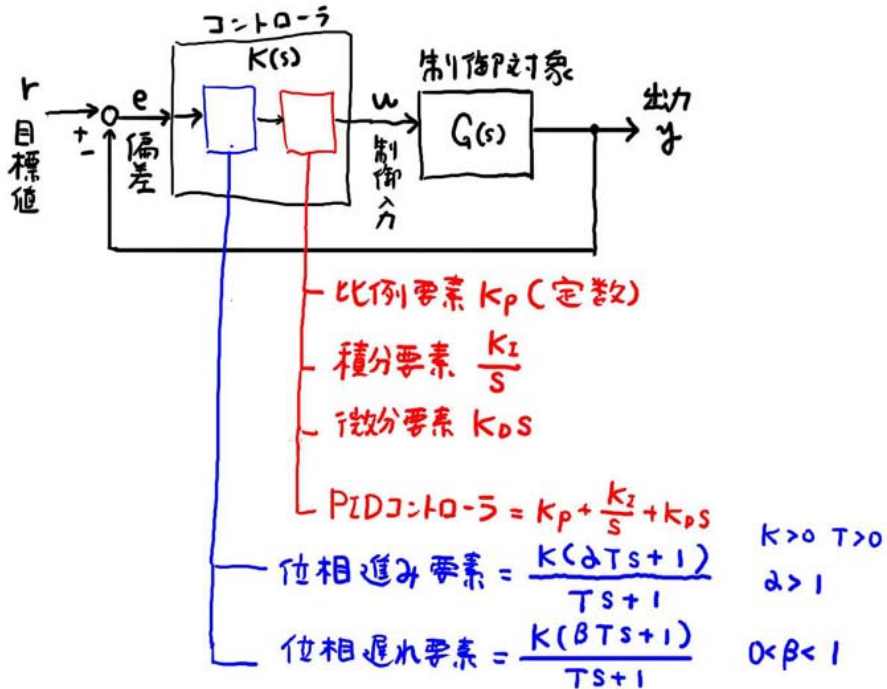
第 12 章

コントローラの構成要素



教科書 116 ページを開いてください。

12.1 コントローラの基本要素


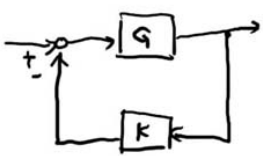
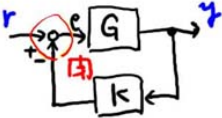


116 ページの最下行から 117 ページにかけて書いてあるように、コントローラ $K(s)$ にどのような伝達関数を用いるかを考える際、まずは基本的なものを用いるのがよいです。

上の図の赤い文字で書かれているものが、教科書 117 ページから 119 ページに説明がある。特に比例と積分と微分を組み合わせた PID コントローラは古くから製造現場においてよく使われてきています。これにおける K_p, K_I, K_D は調整パラメータと呼ばれ、制御結果を見ながら試行錯誤的に値を調整し、より良い制御結果を得られるように設計されます。

青い文字で書かれている「位相進み要素」と「位相遅れ要素」は、PID コントローラなどがある制御系にさらに追加して制御系の性能を向上させるために用いられます。これらの名前の由来は教科書 120 ページから 122 ページに書かれています。

12.2 開ループ伝達関数と閉ループ伝達関数

	開ループ伝達関数	閉ループ伝達関数
	$G(s)K(s)$ 開ループ伝達関数	$\frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}$ 閉ループ伝達関数
	$G(s)K(s)$ 開ループ伝達関数 この経路は GK	$\frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)}$  r から y への伝達関数が閉ループ伝達関数 $y = Ge$ $= G(r - ky)$ $y = Gr - Gky$ $(1 + Gk)y = Gr$ $y = \frac{G}{1 + Gk} r$ 閉ループ伝達関数

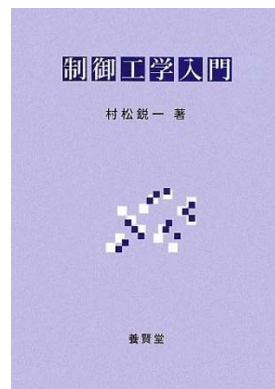
フィードバック制御系のブロック線図が2種類あります。開ループ伝達関数と閉ループ伝達関数がどのような式になるかは上の図のように考えます。

開ループ伝達関数はループを開いて一周したときの伝達関数、閉ループ伝達関数はループを閉じて r から y への伝達関数です。

開ループ伝達関数はどちらも $G(s)K(s)$ であり、閉ループ伝達関数はこの構造の違いに応じて少し違う式になります。

第 13 章

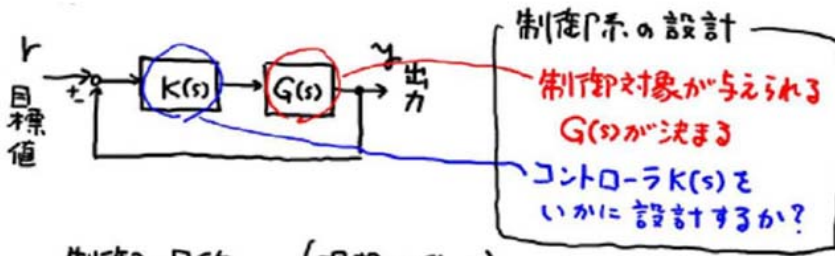
フィードバック制御系の設計



教科書 123 ページを開いてください。

13.1 制御の目的

教科書 123 ページに制御の目的が 4 つ書かれています。それぞれに対してどう対応していけばよいかを教科書 124～127 で述べています。



制御の目的 (理想は $y=r$)

安定にしたい (余裕を大きく)



y に r に速やかに近づきたい

$$y = \frac{GK}{1+GK} r$$

GK を大きくするとよい

定常偏差 ϵ を小さくしたい

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+GK}$$

(P.107の(11.3)式) GK を大きくするとよい

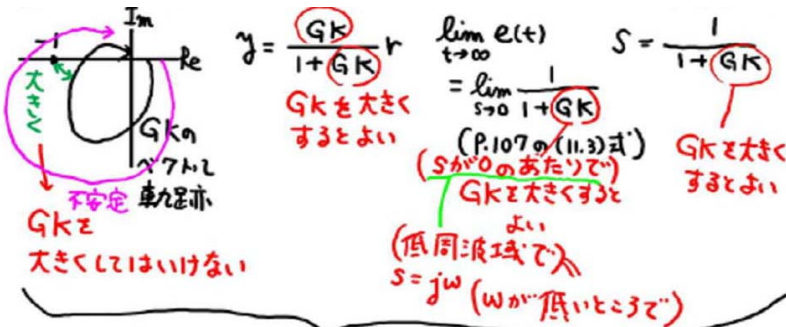
感度関数 S を小さくしたい

$$S = \frac{1}{1+GK}$$

GK を大きくするとよい

(低周波域で) $s = j\omega$ (ω が低いほど)

まとめると上のようになります。ここで注目してほしいのは4つのどれもが GK 、すなわち開ループ伝達関数 $G(s)K(s)$ に関係していることです。



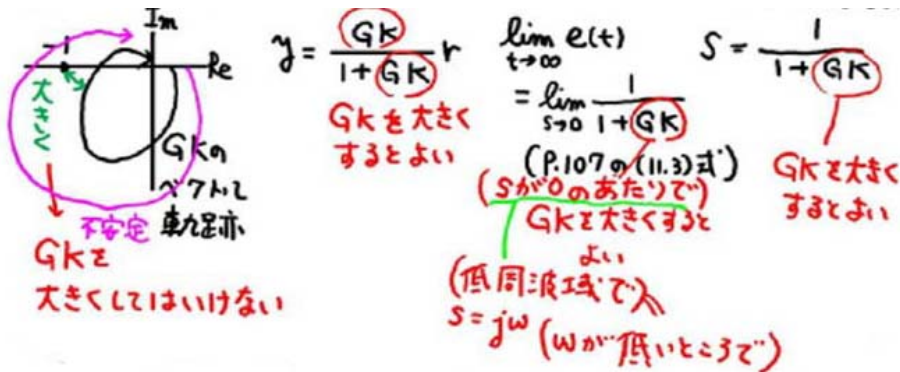
GK の特性 (大きさ と 位相) が制御系の開ループ伝達関数 $G(s)K(s)$ のボード線図の良さに関わる。

良い制御系となるように、この形を整える = 「ループ整形」

制御の目的に $G(s)K(s)$ の特性が関与しているならば、 $G(s)K(s)$ をより良いものにすれば良い制御系が実現できる

はずです。 $G(s)$ は制御対象として与えられるものですが、コントローラ $K(s)$ は制御する人が自由に設計できるものなので、工夫を凝らして $G(s)K(s)$ を良いものにします。

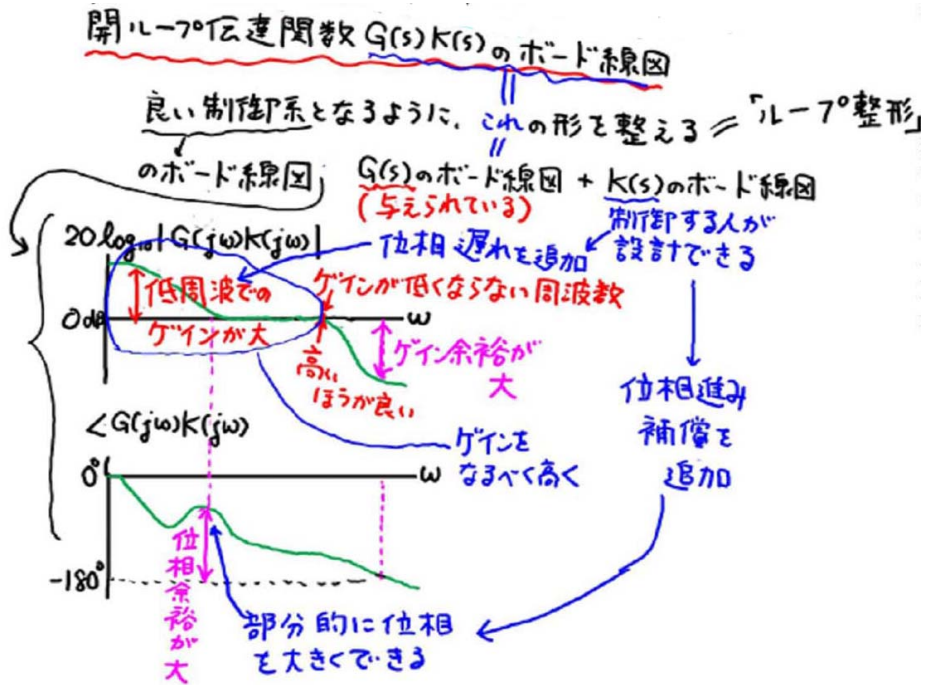
$G(s)K(s)$ の積を考えるのですが、 $G(s)K(s)$ のボード線図は $G(s)$ のボード線図と $K(s)$ のボード線図の和になるので*1、ボード線図を使えば和（足し算）なので考えやすくなります。 $G(s)K(s)$ のボード線図が良い形になるようにコントローラ $K(s)$ を設計する方法を「ループ整形」と呼びます。



上の図はさきほどの図の一部を抜き取って再度示したものです。制御の目的に対応して $G(s)K(s)$ に望まれる特性です。一番左が安定性を重視して「 GK を大きくしてはいけない」としています。それ以外の3つは「 GK を大きくするとよい」としています。

「大きくしてはいけない」と「大きくするとよい」という相反する要求があるので難しいのですが、ここで工夫します。

*1 教科書 71 ページと 73 ページの概形を思い出してください。



「大きくしてはいけない」の理由は制御系を安定にするためです。安定にするには安定余裕（ゲイン余裕と位相余裕）を大きくすればよいです。そのため図にあるように「位相進み補償」*2を追加します。位相進み補償の特徴は位相線図のカーブが部分的に大きくなっていることです。これを追加することにより部分的に位相を進めて位相余裕を大きくしています。また、 $K(s)$ のゲインを高周波帯で小さく設計することによって、 $G(s)K(s)$ のゲインを高周波帯で下げてゲイン余裕を大きくしています。

このように安定性を確保したうえで「 GK を大きくするとよい」について考えていきます。ここで「位相遅れ補償」*3を導入します。この特徴は低周波帯でゲインが大きいことです。これを追加することによって、安定性を損なうことなく低周波帯で GK を大きくすることができます。

このように「大きくしてはいけない」と「大きくするとよい」という相反する要求に対して、周波数帯をうまく分けて考えることによって対応し、より良いボード線図となるように

*2 第 12 章，教科書 120,121 ページを参照してください。

*3 第 12 章，教科書 121,122 ページを参照してください。

$K(s)$ を設計していきます.