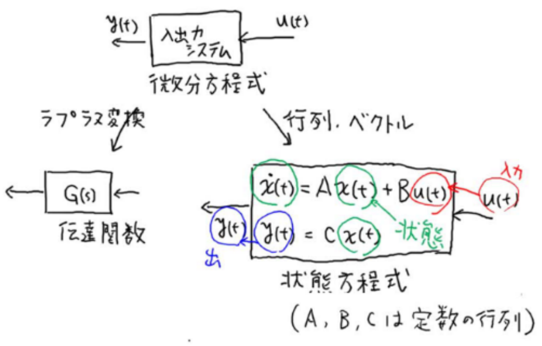
状態方程式

教科書の 137 ページを開いてください．

1　状態方程式

入出力システムを表現する式として,「伝達関数」と「状態方程式」があります．この授業では「状態方程式」について学んでいきます．



138 ページに書いてある「状態方程式」,「出力方程式」が何を指しているか，また太い文字が行列やベクトルを表していることに注意してください．

2　入出力システムの表現

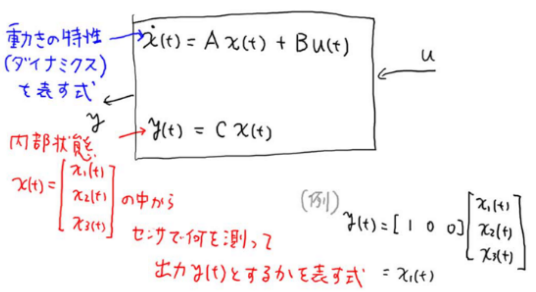
教科書の 139 ページを開いてください．

伝達関数と比べたとき，状態方程式が持つ特徴はいろいろありますが，中でも「多入力多出力システムを表現できる」という点は大きな特徴となっています．

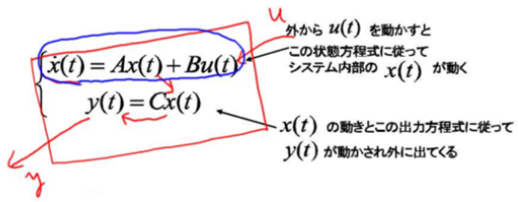
2.1　状態量

伝達関数にはない特徴として,「状態」という量を持っていることも挙げられます．

状態方程式と出力方程式の役割はつぎの図のようになっています．



入力，状態，出力の間の因果関係はつぎの図にあるように，入力によって状態が変化し，状態に応じて出力が決まるという関係になっています．



教科書の 141 ページを開いてください．

このページの下の図は状態方程式に存在する行列やベクトルのサイズを表現しています．$\boldsymbol{A}$ は正方行列であることに注意してください．

教科書の 142 ページを開いてください．

$\boldsymbol{x}(t)$ は一般には n 次元ベクトルです．この微分 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ は，ベクトルの各要素を微分することによって得られるベクトルです．このことが (16.7) 式で表されています．状態方程式は連立微分方程式となっています．

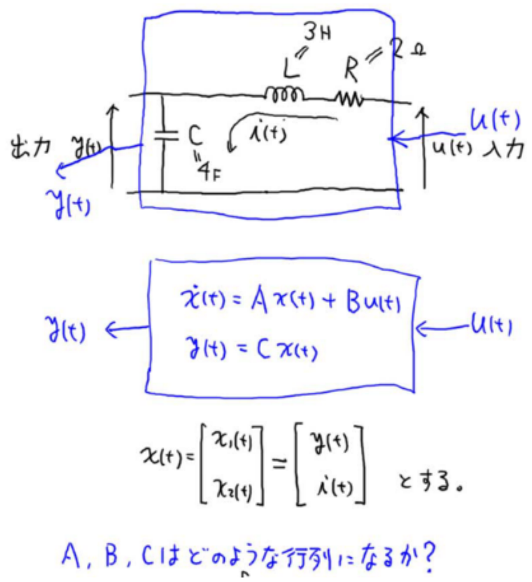
3　状態方程式を用いたシステムのモデリング

制御工学では，制御したいシステムを数式で表すことから学んでいきます．この授業で用いる数式は状態方程式です．機械などの具体的なシステムをいかに状態方程式で表すかをつぎに見てみましょう．

4　状態方程式の具体例

教科書の 144 ページを開いてください．

電気回路を状態方程式で表現する例を見てみましょう．ここで考えているのはつぎのような問題です．



つぎのように式を変形することによって $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ を求めることができます．

作成：山形大学工学部 村松

$$\begin{bmatrix} \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{di(t)}{dt} \end{bmatrix} \parallel$$

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ を求めるために

回路方程式で書いてみる

ダイナミクスを表す

$$\begin{cases} Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + y(t) = u(t) \Leftrightarrow \frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{L}y(t) - \frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ C\frac{dy(t)}{dt} = i(t) \Leftrightarrow \frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \end{cases}$$

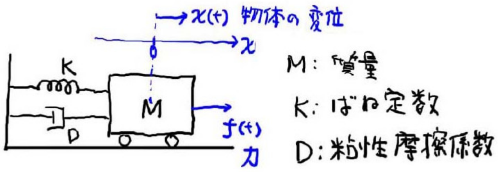
$$\begin{bmatrix} \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{di(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t)$$

$R=2,\ L=3,\ C=4$ を代入して

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5　機械システムの状態方程式表現

質量を持つ物体，ダンパ，ばねからなるシステムとして，つぎの図の例を考えてみます．



力 $f(t)$ で引いたときの物体の変位を $x(t)$ とする。

$f(t)$ と $x(t)$ の関係を式で表すとつぎのようになる

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(t) - Kx(t) - D\frac{dx(t)}{dt}$$

質量・ばね・ダンパ系

入力 $f(t)$ 力 $\rightarrow$ $\boxed{M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + D\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)}$ $\rightarrow$ 出力 $x(t)$ 変位

微分方程式

物体の基準位置からの変位を $x(t)$ で表します．t は時間を表します．外から加わる力 $f(t)$ に対して変位 $x(t)$ がどう変化するか，その動きの特性を表す方程式です．2 階の常微分方程式で表されています．この機械システムはつぎのように状態方程式で表すことができます．

図の中の変位 $x(t)$ と状態 $\boldsymbol{x}(t)$ で記号が同じ x になってしまうので，変位を $x(t)$ から $y(t)$ へ書き換えています．また $f(t)$ を $u(t)$ に変えました．

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + D\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = u(t)$$

両辺を M で割る

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\frac{D}{M}\frac{dy(t)}{dt} - \frac{K}{M}y(t) + \frac{1}{M}u(t)$$

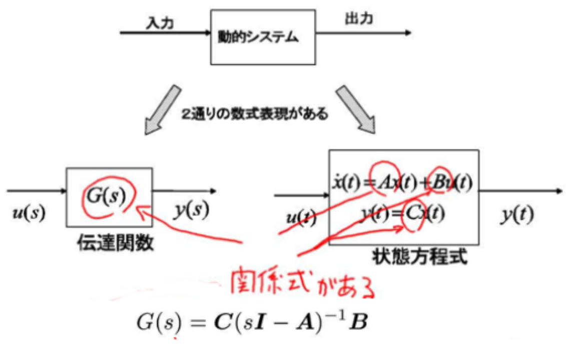
状態ベクトルを $x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix}$ とする。

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix}}_{x(t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbb{A}\, x(t) + \mathbb{B}\, u(t) \\ y(t) = \mathbb{C}\, x(t) \end{cases}$$

6　状態方程式と伝達関数の関係

伝達関数と状態方程式はともに同じシステムの表現ですから，$G(s)$ と $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ との間には何か関係式が存在するはずです．それが (16.22) 式です．



この式を使うと状態方程式表現から伝達関数の変換ができます．

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

両辺ラプラス変換

$$sx(s) - \underbrace{x(0)}_{=0} = Ax(s) + Bu(s)$$

$$sx(s) - Ax(s) = Bu(s)$$

$$(sI - A)x(s) = Bu(s)$$

$$x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s)$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = u(s)$$

$$\mathcal{L}[x(t)] = x(s)$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sx(s) - x(0)$$

$x(0)$ = $t=0$ のときの $x(t)$ の値 = 0

伝達関数について考えるときは、初期値は0とする

$$y(t) = Cx(t)$$

ラプラス変換

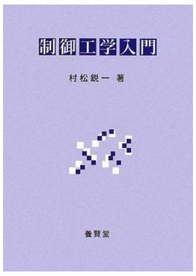
$$y(s) = Cx(s) \longrightarrow y(s) = \boxed{C(sI - A)^{-1}B}\,u(s)$$

$$y(s) = \boxed{G(s)}\,u(s)$$

$$\boxed{G(s) = C(sI - A)^{-1}B}$$

作成：山形大学工学部 村松

状態方程式の解



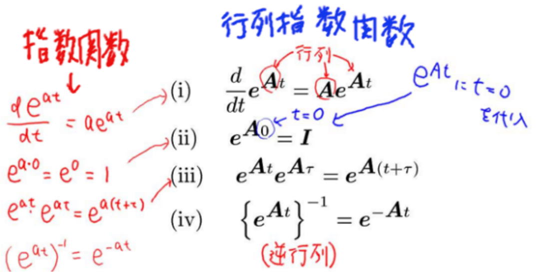
教科書の 167 ページを開いてください．

7　状態方程式を解くとは

(18.1) 式は微分方程式です．$\boldsymbol{x}(t)$ が未知の関数と考えて，方程式の解を求めることをこれから考えます．行列とベクトルからなる微分方程式であることに注意してください．

8　行列指数関数

$\boldsymbol{A}$ が行列であることに注意してください．(18.3) 式は高校レベルの指数関数ではなく，行列の関数です．t は時間を表しています．$e^{\boldsymbol{A}t}$ は時間とともに各要素の値が変化していく行列です．



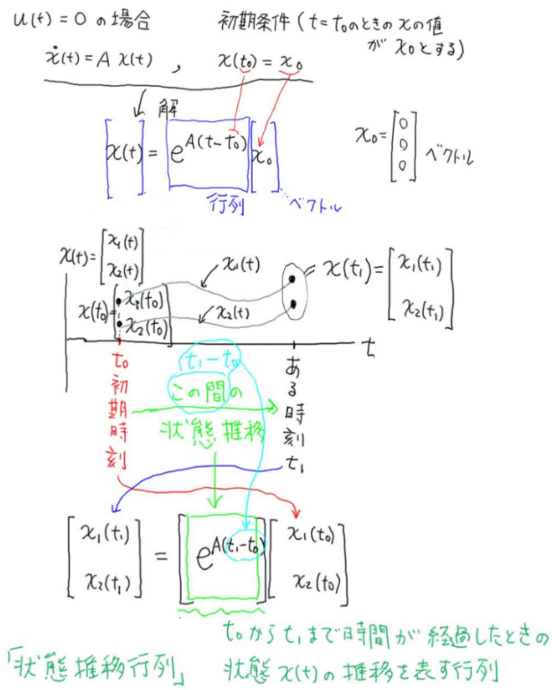
左は普通の指数関数，右は行列指数関数です．よく似た性質がありますが，$\boldsymbol{A}$ が行列なので全て行列の式であることに注意してください．

教科書の 169 ページを開いてください．

9　状態方程式の解

9.1　$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ の場合の解

解は (18.10) 式のように行列指数関数で表されます．



解の意味を教科書の説明と上の図で理解してください．

9.2　$\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ の場合の解

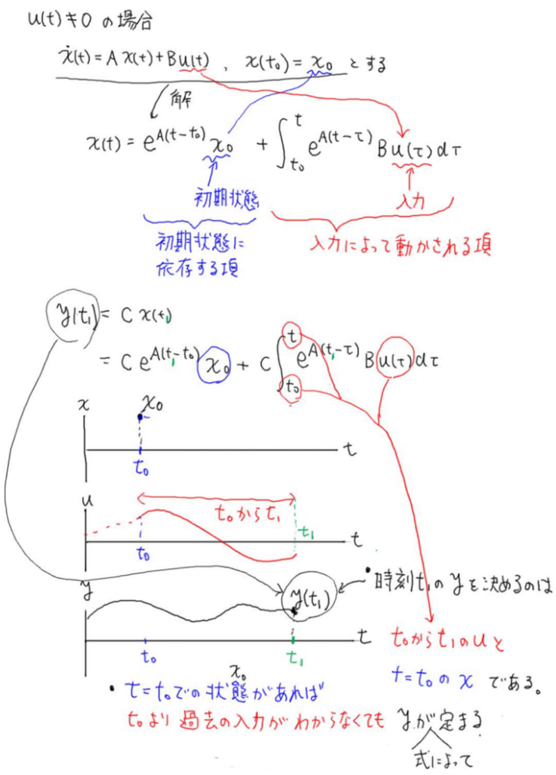
解は (18.12) 式のように行列指数関数と時刻 t_0 から t までの積分で表されます．

教科書の 171 ページを開いてください．

10　解の特徴

(18.12)，(18.13) 式で表される解がもつ意味を説明しています．

作成：山形大学工学部 村松

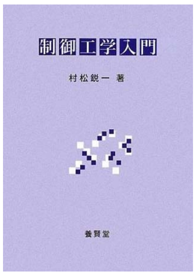


入力 $\boldsymbol{u}(t)$ が解にどう影響するかを考えると，時刻 $t = t_0$ での状態 $\boldsymbol{x}_0$ の意味が見えてきます．そこから $x(t)$ が「状態」という言葉で呼ばれる理由が 171 ページに説明されています．

11　状態の初期値について

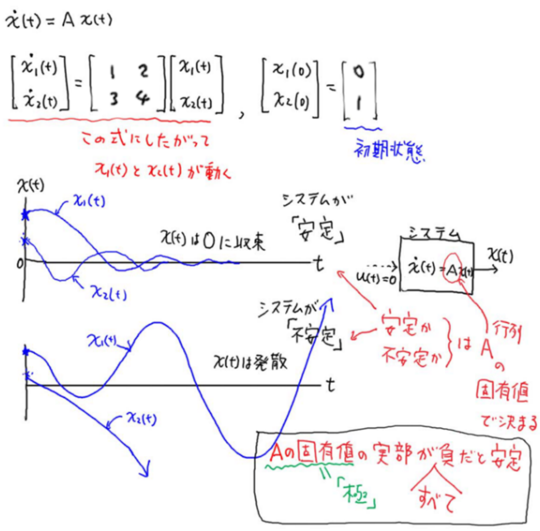
システムを伝達関数で表すか，状態方程式で表すか，2 通りの方法があります．状態方程式で表す場合，状態の初期値まで考慮されることになります．一方，伝達関数では状態の初期値は 0 と仮定した表現になっています．

安定性



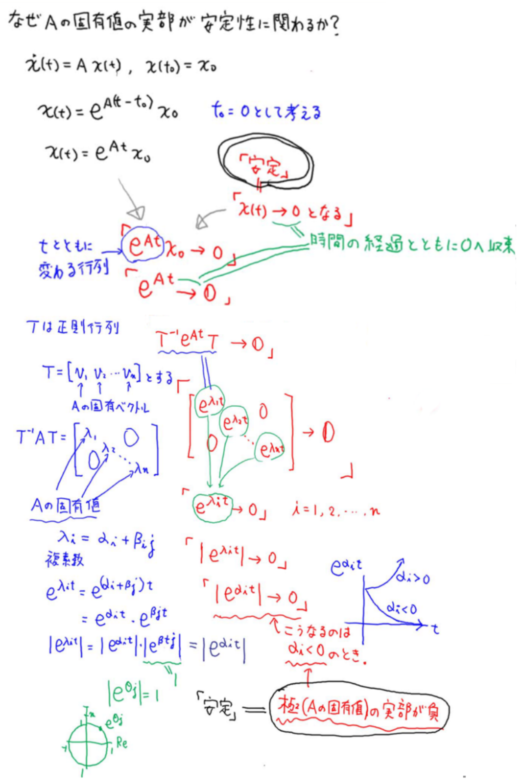
教科書の 174 ページを開いてください．

12　線形自由システムの安定性

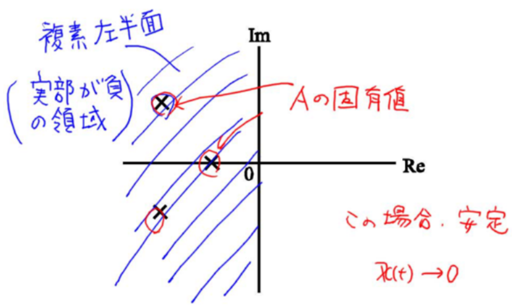


入力が 0 のシステムは線形自由システムと呼ばれます．状態の初期値が $\mathbf{0}$ ではないある値をとっているとします．このとき時間とともに状態 $\boldsymbol{x}(t)$ が $\mathbf{0}$ に収束するかを考えます．$\mathbf{0}$ に収束するとき「システムは安定」と呼ばれます．

安定か不安定かは行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値によって判別することができます．固有値の実部が負であることが安定条件となり，教科書の 176 ページに詳しく書かれています．$\boldsymbol{A}$ の固有値は「極」と呼ばれます．



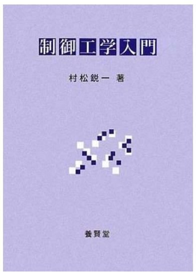
177 ページになぜ固有値が安定性に関係しているかを説明しています．その説明を上の図でも表しています．



安定なシステムの固有値の実部は負になっています．複素平面上で図示すると，上のようになります．

作成：山形大学工学部 村松

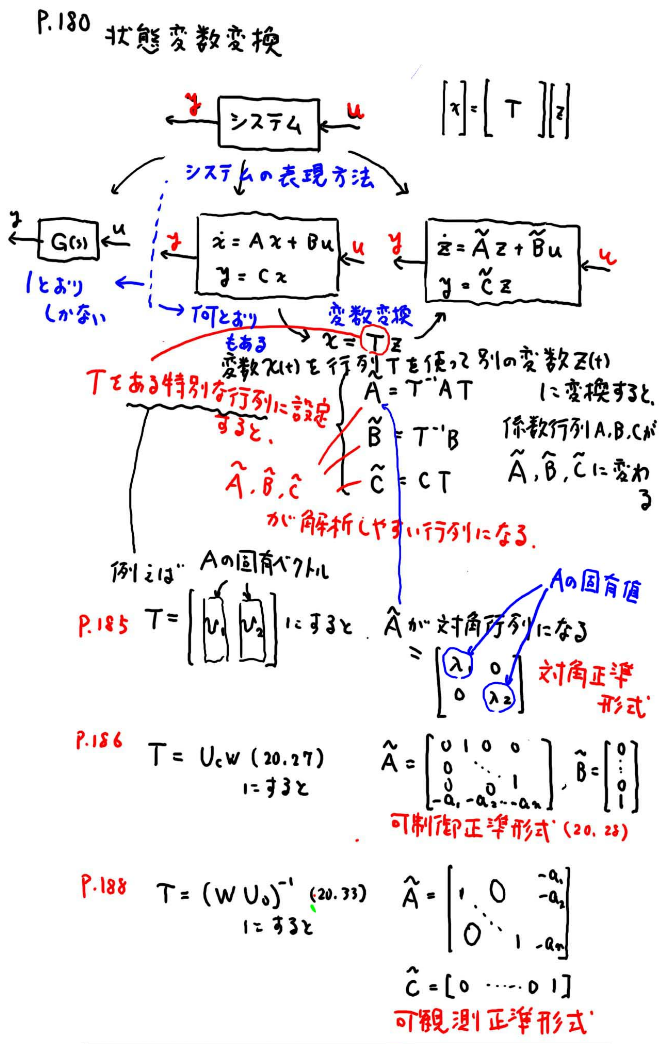
状態変数変換



教科書の 180 ページを開いてください．

13　状態変数変換

第 20 章の内容をまとめるとつぎのようになります．



状態変数を変換することによって，行列が取り扱いやすい形式になります．変換によっても入力と出力の関係は変わりません．変換しても同じシステムを表現する式になっています．

変換に用いる行列 $\boldsymbol{T}$ をどう選ぶかによって，変換された形式が変わってきます．よく用いる形式には

- 対角正準形式
- 可制御正準形式
- 可観測正準形式

があります．具体的にどのような形式になっているかは教科書で確認してください．

教科書の 189 ページを開いてください．

特に重要なのは正準形式と伝達関数の関係です．

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix} u(t) \tag{4.37}$$

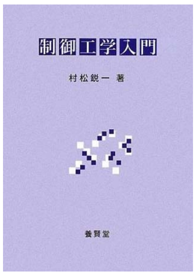
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

$$G(s) = \frac{\tilde{b}_n s^{n-1} + \tilde{b}_{n-1} s^{n-2} + \cdots + \tilde{b}_2 s + \tilde{b}_1}{\underbrace{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1}_{|sI-A|}} \tag{4.42}$$

伝達関数の分子と分母に現れている係数が，可制御正準形式の行列の現れていることに注意してください．この関係を利用すると伝達関数を状態方程式に変換することができます．

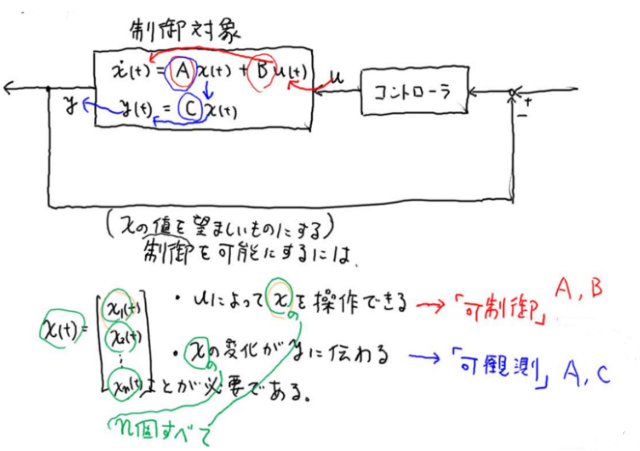
その方法が教科書の 190 ページから 191 ページに書かれています．

可制御性・可観測性



教科書の 194 ページを開いてください．

14　可制御性



例えばつぎの状態方程式を考えてみる．

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \overset{B}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} u(t) \qquad (5.3)$$

これを 2 つの式に展開してみると

uで操作できる

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \qquad (5.4)$$

$$\dot{x}_2(t) = 3x_2(t) \qquad (5.5)$$

uと無関係

制御入力 $\boldsymbol{u}$ によって状態 $\boldsymbol{x}$ を制御できる場合，「可制御」といいます．上の例では x_2 が制御できないので可制御ではありません．

別の例を考えてみる．

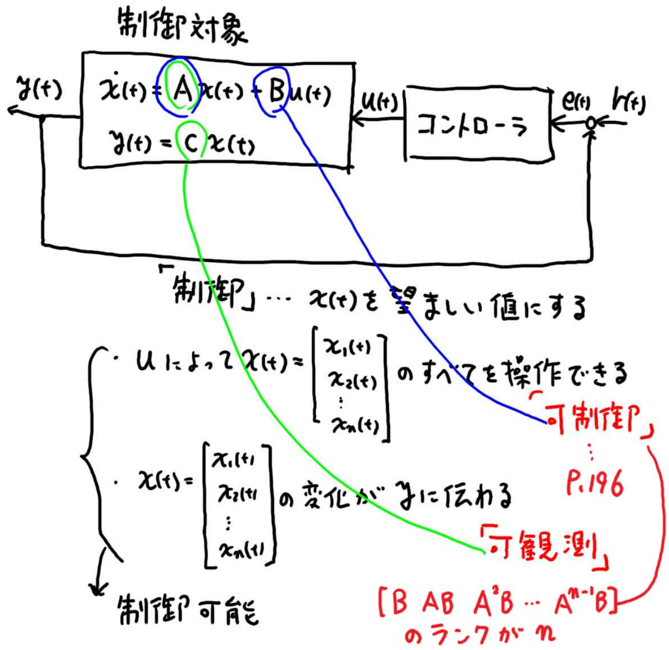
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \overset{B}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} u(t) \qquad (5.6)$$

の場合，

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \qquad (5.7)$$

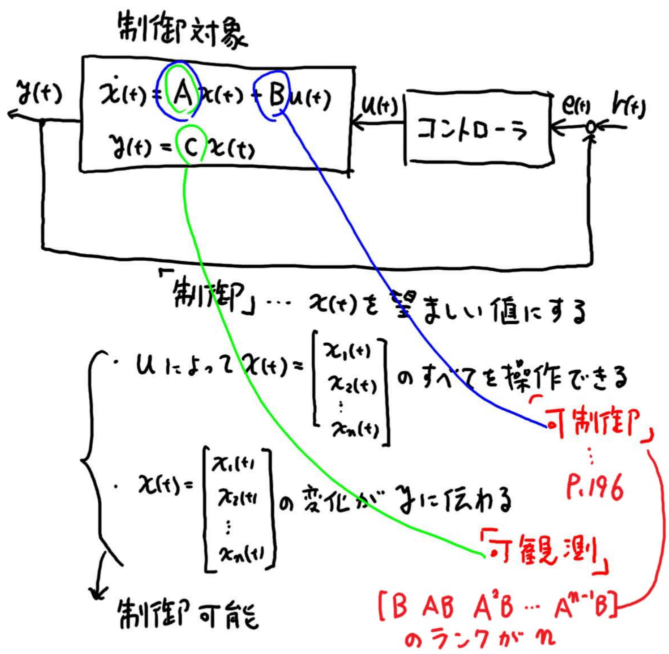
$$\dot{x}_2(t) = 3x_1(t) \qquad (5.8)$$

上の例では x_1 も x_2 も制御できるので可制御です．



このように制御を考えるにあたって，「可制御」かどうかを考察することがあります．より厳密な定義は教科書の 195 ページに書いてあります．

また，$\boldsymbol{x}$ の変化が $\boldsymbol{y}$ に伝わることを「可観測」といいます．「可観測」のより厳密な定義は教科書の 197 ページに書いてあります．



可制御かどうかは行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が関係した条件で判別できます．

$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$

可制御かどうかを判別する方法

$[B\ \ AB\ \ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B]$ のランクが n かどうか

（$x(t)$の次元）

$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$ の場合

1入力システム（$u(t)$がベクトルではない）の場合

$[B\ \ AB\ \ A^2B \cdots A^{n-1}B]$ の行列式が0でないかどうか.

$u(t) = u_1(t)$ の場合

このように $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ から構成される行列のランクで判別できます.

具体例を見てみましょう.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ の場合

システムは可制御か？

$n = 2$ $m = 1$

xの次元 uの次元

‖ ‖

Aの列の数 Bの列の数

$\underbrace{U_c}_{\text{可制御性行列}} = [B\ \ AB]$

$= \left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\ \ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

（1入力なので $|U_c| \neq 0$ なら可制御だが.）

$|U_c| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ なので不可制御である.

上の場合は不可制御です.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ の場合

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$U_c = [B\ \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$|U_c| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 0 = 3 \neq 0$ なので可制御である。

上の場合は可制御です.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $C = [0\ \ 1]$ の場合. 可観測かどうか？

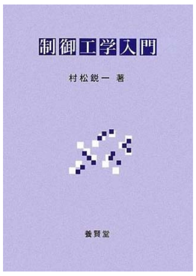
$U_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$CA = [0\ \ 1]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = [0\ \ 3]$

$|U_o| = 0 \cdot 3 - 1 \cdot 0 = 0$ なので不可観測である。

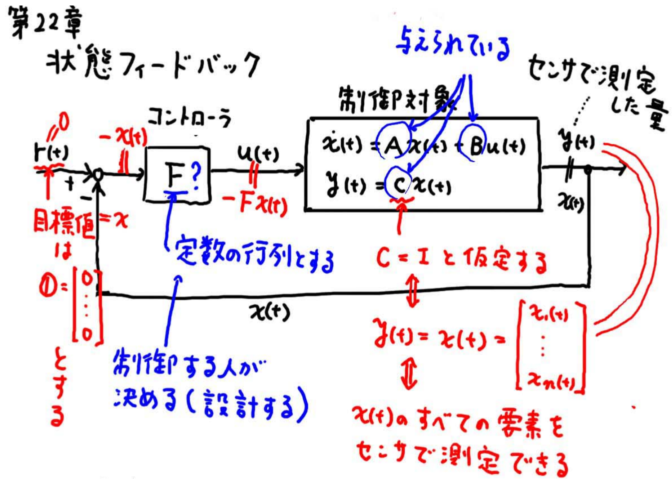
可観測性は行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{C}$ から判別できます.

状態フィードバック

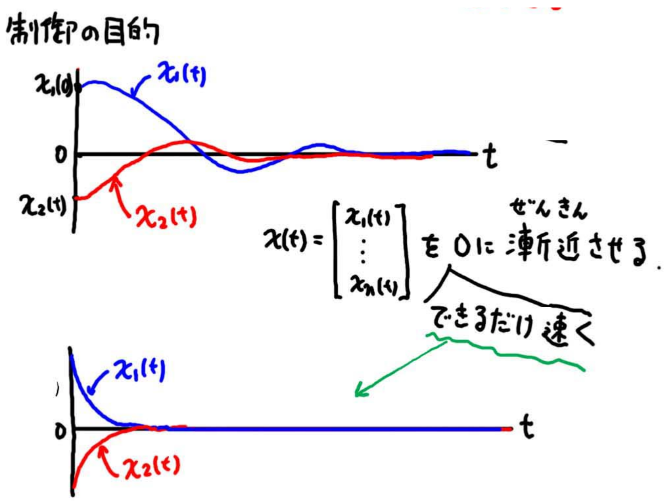


教科書の 208 ページを開いてください．

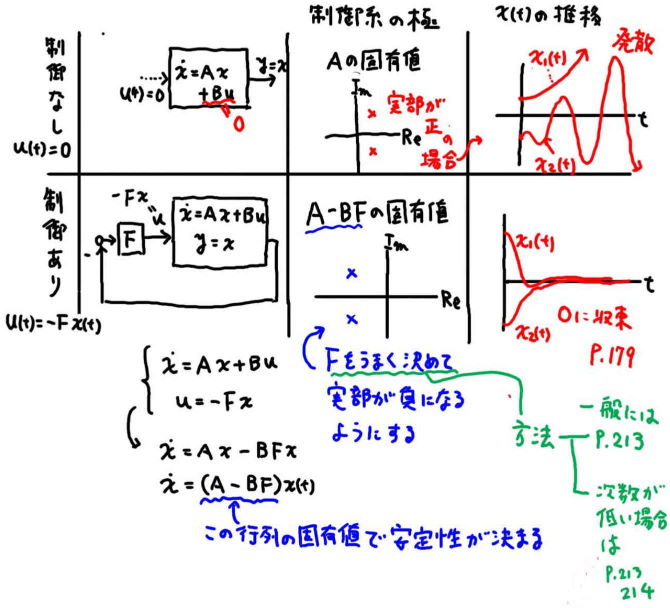
15　状態フィードバックによる制御



制御対象の状態量がすべてセンサで測定できる場合に「状態フィードバック」と呼ばれる制御を用いることができます．この場合，センサの出力 $\boldsymbol{y}(t)$ が $\boldsymbol{x}(t)$ に等しく，行列 $\boldsymbol{C}$ が単位行列となっていることになります．

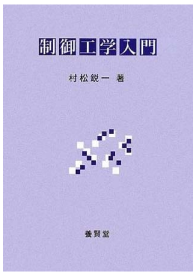


制御の目的は状態ベクトルのすべての要素を 0 に収束させることです．しかもできるだけはやく収束させることが望まれます．



制御の目的を達成するためには，フィードバックに用いる行列 $\boldsymbol{F}$ を適切に設定する必要があります．フィードバック制御系の状態方程式は行列 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF}$ で表されるので，その固有値を適切に設定することが $\boldsymbol{F}$ の設計方針となります．その具体的な手順は教科書の 213 ～ 214 ページに書いてあります．

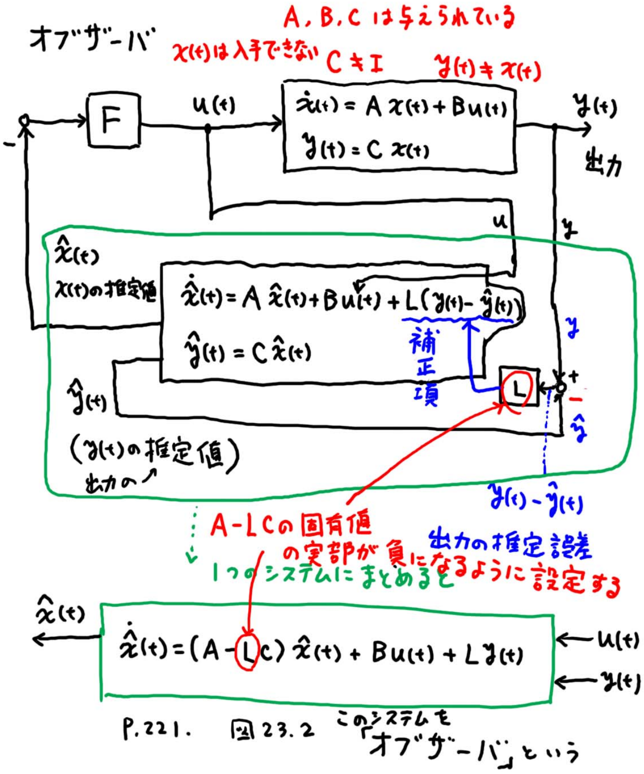
オブザーバ



教科書の 218,219 ページを開いてください．

16　オブザーバ

制御対象の出力 $\boldsymbol{y}(t)$ が状態 $\boldsymbol{x}(t)$ と等しくない場合，状態フィードバック制御を用いることができません．状態 $\boldsymbol{x}(t)$ を何とかして推定する方法を考えてみましょう．



状態 $\boldsymbol{x}(t)$ の推定値 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ を算出するシステムは「オブザーバ」といいます．その仕組みは上の図で表されます．教科書 220 ページにその考え方が詳しく書いてありますので，図と教科書で理解を深めてください．

17　推定の証明

このオブザーバが本当に $\boldsymbol{x}(t)$ を推定できるのか，その証明が教科書 221 ページから 222 ページにかけて書かれています．$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC}$ の固有値の実部が負であることが重要です．

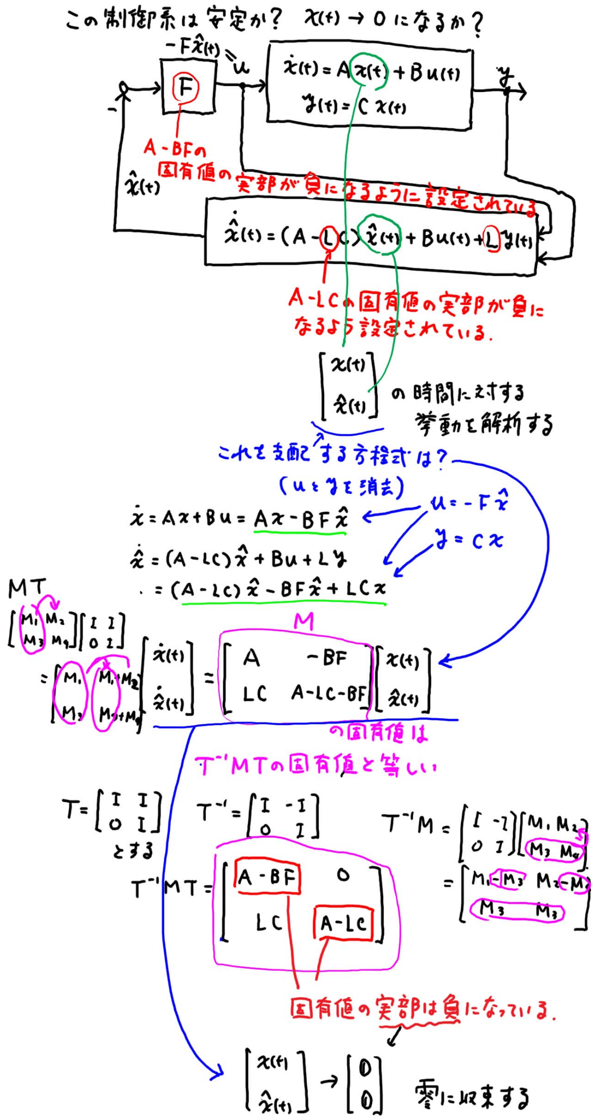
18　オブザーバゲインの求め方

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC}$ の固有値の実部が負になるような $\boldsymbol{L}$ の求め方は，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF}$ の固有値の実部が負になるような $\boldsymbol{F}$ の求め方を利用するものです．前章の状態フィードバックの $\boldsymbol{F}$ の求め方を復習しましょう．

19　オブザーバのある制御系の安定性

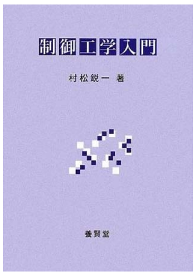
制御対象の状態の推定値 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ が入手できれば，それを用いたフィードバック制御 $\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ を用いることが考えられます．このような制御系は安定なのでしょうか．

それは教科書 224 ページのように証明することができます．つぎの図ではその証明の流れを示しています．



作成：山形大学工学部 村松

最適制御

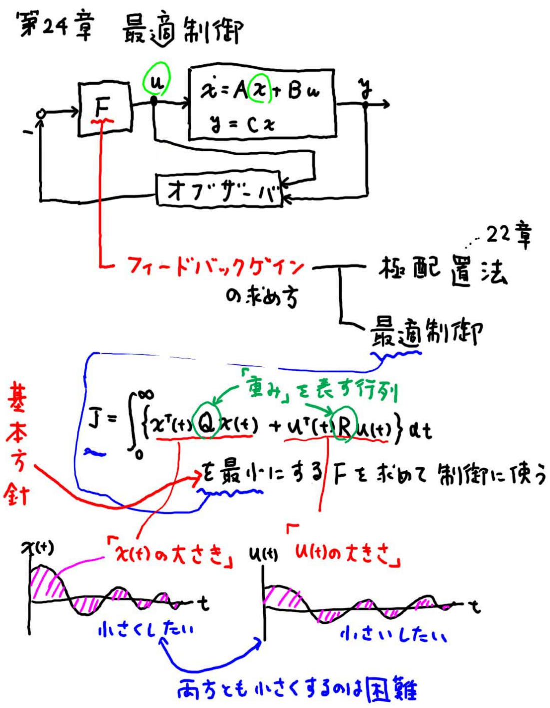


教科書の 229, 230 ページを開いてください．

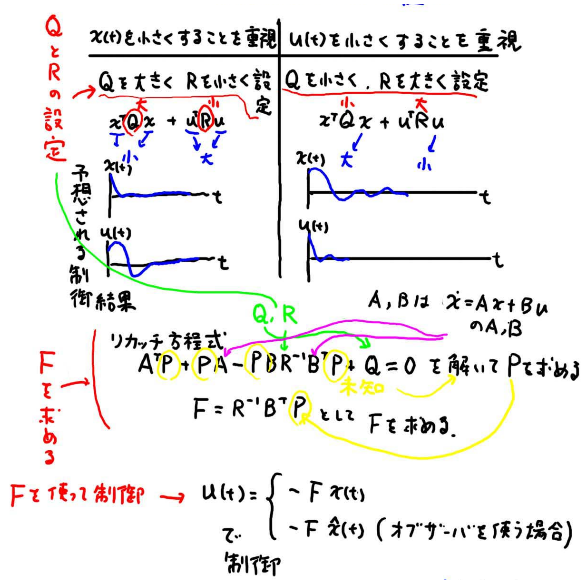
20　最適制御の考え方

制御系に望まれる２つの性質が書かれています．これらをバランスよく達成するための方法が今回のテーマです．

ある評価関数を設定して，それを最適化するようなパラメータを求めることは，工学全般においてよく見られます．制御においてもこの考え方は重要であり，フィードバックゲインの設計にあてはまっています．

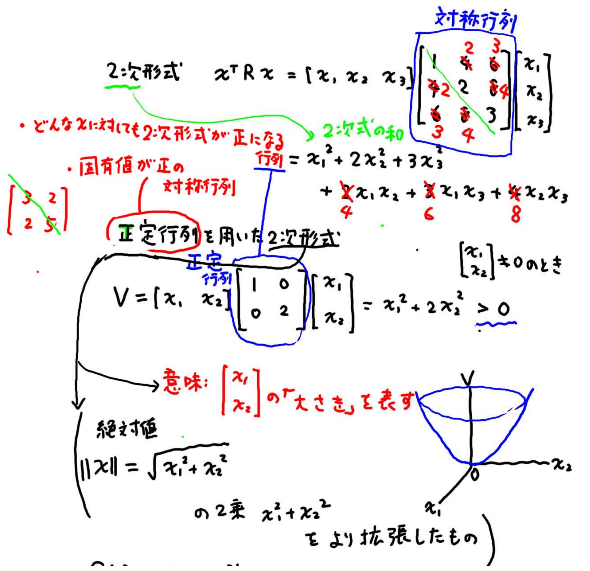


両立が難しい目的に対してうまくバランスをとった落とし所を見つけてフィードバックゲインを求めます．それを用いて制御すればバランスの良い制御が実現できるはずです．

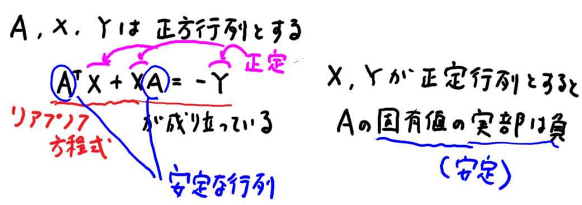


この設計で用いられる (24.6) 式はリカッチ方程式と呼ばれるもので，制御における方程式として有名なものになっています．

評価関数の中に２次形式がありますので，その意味を少しだけ補足説明しておきます．



最小化できている証明とともに，制御系が安定であることも証明できます．その証明においてリアプノフ方程式が用いられます．これも有名な方程式です．



作成：山形大学工学部 村松