制御工学のためのラプラス変換

山形大学工学部　村松鋭一

序文

10 年ぐらい前の授業の資料です（今はその授業はありません）．授業の資料はもっとたくさんあって，その一部を抜粋しています．

最終更新日： 2025 年 6 月 12 日

目次

第 1 章

ラプラス変換

1.1　ラプラス変換

1.1.1　微分方程式の解法

つぎの微分方程式を解いてみよう．

$$y'(t)+2y(t)=4\ ,\quad y(0)=5 \tag{1.1}$$

以前に学んだ解法（「未定定数法」と呼ばれる解法）はつぎのようなものであった．(1) 特性方程式を用いて斉次方程式の一般解を求める．(2) 非斉次方程式の特殊解を求める．(3) 非斉次方程式の一般解を求める．(4) 初期条件に適合する解を求める．

これらを実行するとつぎのようになる．まず，特性方程式は

$$\lambda+2=0 \tag{1.2}$$

なので，$\lambda=-2$ を用いて，斉次方程式の一般解を

$$y_0(t)=Ce^{-2t} \tag{1.3}$$

とする．与えられた微分方程式の右辺が 4 という定数なので，未定定数 d を用いて特殊解を

$$y_p(t)=d \tag{1.4}$$

とする．これを微分方程式に代入すると

$$y_p'(t)+2y_p(t)=0+2d=4 \tag{1.5}$$

となり，$d=2$ が得られ，特殊解が

$$y_p(t)=2 \tag{1.6}$$

と定まる．非斉次方程式の一般解は (1.3) 式と (1.6) 式より，

$$y(t)=Ce^{-2t}+2 \tag{1.7}$$

となる．初期条件 $y(0)=5$ を適用すると

$$y(0)=C+2=5 \tag{1.8}$$

より，$C=3$ が求められる．よって，微分方程式の解は

$$y(t)=3e^{-2t}+2 \tag{1.9}$$

である．

このように微分方程式を解くことは煩雑な計算を要するのであるが，ラプラス変換を用いると少し簡単になる．上で用いた解法（未定定数法）とラプラス変換を用いる解法は，図 1.1 のような関係にある（詳細を理解するのはまだ説明不足なので，まずは概略だけをつかんでほしい）．

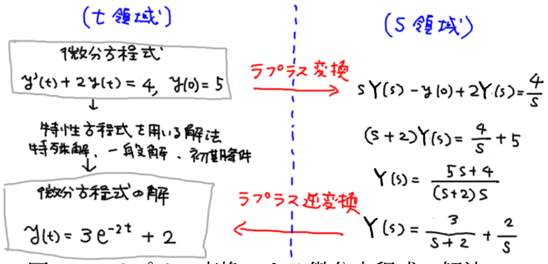

図 1.1　ラプラス変換による微分方程式の解法

図 1.1 の中の左側は未定定数法を表している．一方，右側のコースをたどった解法が「ラプラス変換による解法」である．右側には微分・積分は含まれておらず，s で表される式の加減乗除という比較的簡単な計算しかない．

図の左側は時間 t の関数を扱う世界であり，しばしば「t 領域」と呼ばれる．図の右側では t がなくて s で表される「s 領域」になっている．ラプラス変換によって「t 領域」から「s 領域」へ式が変換されている．逆に s から t へは「ラプラス逆変換」が用いられている．

（補足）ラプラス変換に限らず一般に，工学における数学的解析では図 1.2 のような手法が用いられることが多い．与えられた問題を直接的に解くのではなく，ある種の変換で計算しやすい形に変えて，最後に逆変換によって解を得る．少し遠回りをする解法ではあるが，複雑な計算を回避できる利点がある．

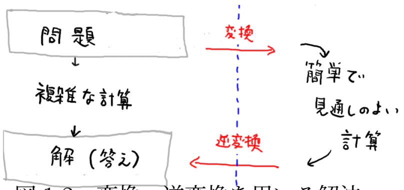

図 1.2　変換・逆変換を用いる解法

1.1.2　ラプラス変換とラプラス逆変換

図 1.1 の詳細について少しずつ説明していく．この図における変換と逆変換の部分に注目すると図 1.3 のような対応関係を見い出すことができる．

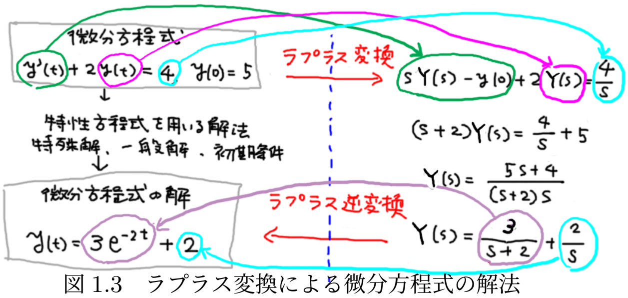

図 1.3　ラプラス変換による微分方程式の解法

ラプラス変換とラプラス逆変換の部分だけを抜き出すと図 1.4 になる．

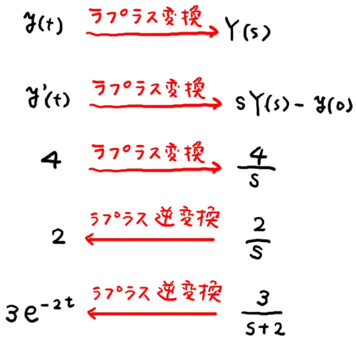

図 1.4　ラプラス変換とラプラス逆変換

この対応関係をもう少し一般化してまとめると，図 1.5 のようになる．

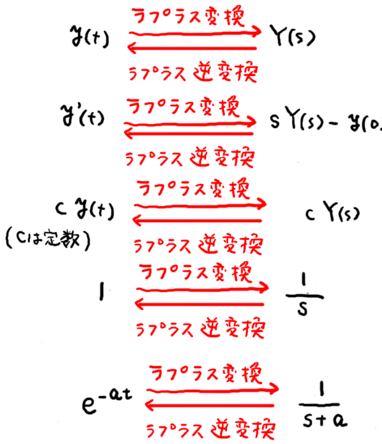

図 1.5　ラプラス変換とラプラス逆変換

この図の対応関係はどのようなルールに基づいているのだろうか．つぎの節で述べるラプラス変換の定義を用いると，上の対応関係はすべて説明がつく．

1.1.3　ラプラス変換の定義

ここからは $y(t)$ という記号を $f(t)$ に切り替えて説明する．これから考える $f(t)$ は，数学的には t に関する「関数」であるが，工学的には時間 t とともに変化する「信号」(電気信号など) と考えてもよい．以下の説明では主に「関数」という言葉を用いるが，「信号」に置き換えて考えるとわかりやすい場合もある．

$$t < 0 \text{ で } f(t) = 0 \tag{1.10}$$

である関数 $f(t)$ に対して，

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{1.11}$$

を求めること，また，こうして求められる $F(s)$ を $f(t)$ の**ラプラス変換**と呼ぶ．

$f(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}[f(t)]$ とか $F(s)$ と書くことにする．すなわち，

ラプラス変換：

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{1.12}$$

とする．これを図にすると図 1.6 のようになる．

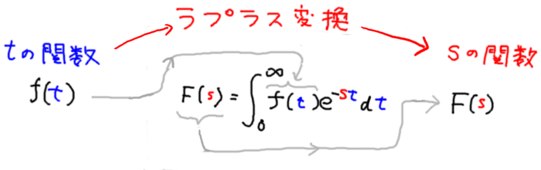

図 1.6　ラプラス変換の定義

積分のところが難解であるが，要点は「t の関数を s の関数に変換している」ことである．

1.1.4　ステップ関数のラプラス変換

図 1.5 の中につぎの関係が含まれている．

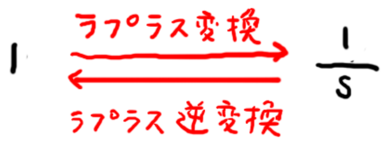

図 1.7　ラプラス変換

これを図 1.6 の定義にしたがい，$f(t) = 1$ の場合として書きなおすと，つぎの図 1.8 のようになる．

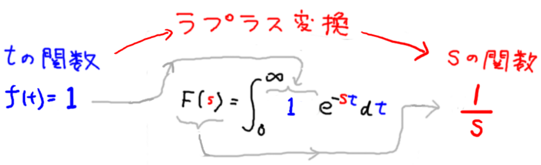

図 1.8　「1」のラプラス変換

上の図では単に $f(t) = 1$ と書いているが，(1.10) 式で仮定したように，$t < 0$ では $f(t) = 0$ なので，正確にはつぎのような関数 $u_s(t)$ を扱っている．

$$u_s(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

となる．このような関数は**ステップ関数**，信号の場合は**ステップ信号**と呼ばれ，横軸を t にとったグラフで表わすと図 1.9 のようになる．

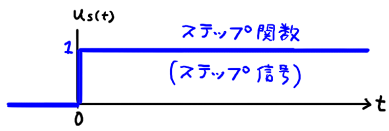

図 1.9　ステップ関数

さて，図 1.8 に考察を戻し，正確に書きなおすと図 1.10 のようになる．

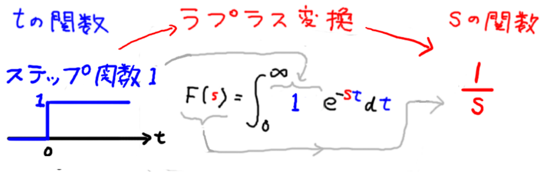

図 1.10　ステップ関数のラプラス変換

図中の右に $\frac{1}{s}$ があるが，本当にそうなのか実際に積分を計算して確かめてみよう．

$$\mathcal{L}[u_s(t)] = \mathcal{L}[1] = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} dt \tag{1.14}$$
$$= \left[\frac{1}{-s}e^{-st}\right]_0^\infty \tag{1.15}$$
$$= 0 - \frac{1}{-s} \tag{1.16}$$
$$= \frac{1}{s} \tag{1.17}$$

確かに $\frac{1}{s}$ となった．

(1.15) 式から (1.16) 式を導くとき，∞ を取り扱うことになり，

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st} = 0 \tag{1.18}$$

を用いている．ラプラス変換を行うとき，s がこの性質を満たすことは暗黙のうちに仮定される．この仮定については数学的には s の収束域として説明を要するところであるが，この授業ではそこまでは触れない．詳細を知りたい場合は数学の本を参照されたい．

まとめるとつぎのようになる．

ステップ関数をラプラス変換すると $\frac{1}{s}$ になる．すなわち，

$$\mathcal{L}[u_s(t)] = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \tag{1.19}$$

再度図をあげておく．

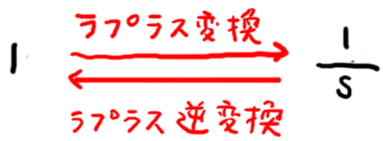

図 1.11　ステップ関数のラプラス変換

1.1.5　指数関数のラプラス変換

$f(t)$ が指数関数で，

$$f(t) = e^{-at} \tag{1.20}$$

の場合を考えてみる．ただし a は定数である．

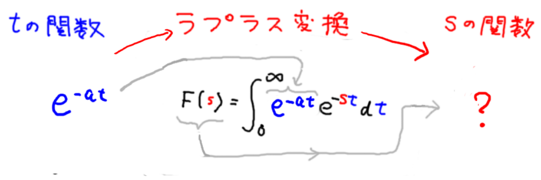

図 1.12　指数関数のラプラス変換

図 1.12 の中の「？」には何が当てはまるか積分して求めてみよう．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{-at}] &= \int_0^\infty e^{-at} e^{-st} dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(s+a)t} dt \\
&= \left[\frac{1}{-(s+a)} e^{-(s+a)t} \right]_0^\infty && (1.21) \\
&= 0 - \frac{1}{-(s+a)} && (1.22) \\
&= \frac{1}{s+a} && (1.23)
\end{aligned}$$

となる．

(1.21) 式から (1.22) 式を導くとき，

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(s+a)t} = 0 \tag{1.24}$$

を用いている．これも暗黙のうちに満たされているとする．

まとめるとつぎのようになる．

> 指数関数 e^{-at} をラプラス変換すると $\frac{1}{s+a}$ になる．すなわち，
>
> $$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a} \tag{1.25}$$

以上より，図 1.5 に含まれているつぎの関係が説明できた．

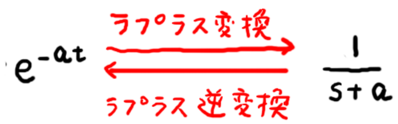

図 1.13　指数関数のラプラス変換

1.1.6　ラプラス変換の線形性

図 1.5 の中につぎのような関係が記述されている．

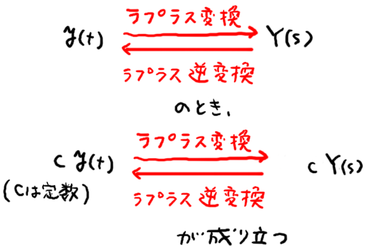

図 1.14　定数倍のラプラス変換

もっと一般的につぎのような関係が成り立つ．

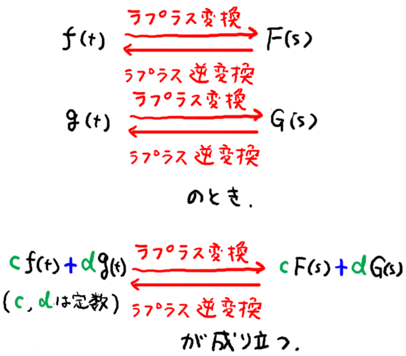

図 1.15　ラプラス変換の線形性

$f(t)$, $g(t)$ に定数を掛けたり，それらを足し合わせたものをラプラス変換したものは，それぞれのラプラス変換 $F(s)$, $G(s)$ に同じ定数を掛けて足し合わせたものとなる．すなわち，線形結合のラプラス変換は，それぞれのラプラス変換の線形結合になる．このことを「ラプラス変換は線形性を有する」とか「重ね合わせの理が成り立つ」という．

これを証明するのは簡単で，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[cf(t)+dg(t)] &= \int_0^\infty \{cf(t)+dg(t)\}e^{-st}dt \\ &= c\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt + d\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt \\ &= cF(s)+dG(s) \qquad (1.26)\end{aligned}$$

で示される．

さて，図 1.15 の線形性は，定数倍や和の式に適用される．図 1.16 はその一例である．

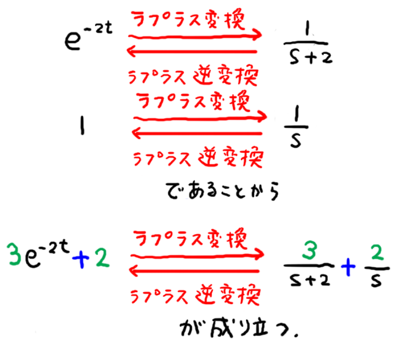

図 1.16　定数倍と和の変換

これが図 1.3 の解法で用いられている.

1.1.7　導関数のラプラス変換

図 1.3 のラプラス変換による解法において，$y(t)$ の導関数 $y'(t)$ に適用される図 1.17 の性質がある.

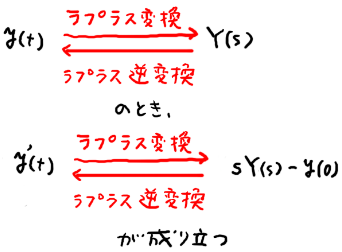

図 1.17　導関数のラプラス変換

図 1.17 の性質は微分方程式を解くときに必ず用いられる．これはつぎのように部分積分を用いて証明される.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y'(t)] &= \int_0^\infty y'(t)e^{-st}dt \\ &= \left[y(t)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty y(t)(-s)e^{-st}dt \\ &= -y(0) + s\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt \\ &= sY(s) - y(0) \qquad (1.27)\end{aligned}$$

上の証明の中で

$$\lim_{t\to\infty} y(t)e^{-st} = 0 \qquad (1.28)$$

を用いた．これも $y(t)$ のラプラス変換が存在することから暗黙のうちに満たされている.

図 1.17 を式で表わすと

$$\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0) = s\mathcal{L}[y(t)] - y(0) \qquad (1.29)$$

である．これを用いると 2 階導関数 $y''(t)$ のラプラス変換を得ることができる.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y''(t)] &= s\mathcal{L}[y'(t)] - y'(0) \\ &= s\{sY(s) - y(0)\} - y'(0) \\ &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \qquad (1.30)\end{aligned}$$

この方法を繰り返すと m 階導関数 $\frac{d^m}{dt^m}y(t)$ のラプラス変換の式も導出される．まとめるとつぎのようになる．

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s) \tag{1.31}$$

とすると，つぎが成り立つ．

$$\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0) \tag{1.32}$$
$$\mathcal{L}[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[\frac{d^m}{dt^m}y(t)\right] \\
&= s^mY(s) - \sum_{k=1}^{m} s^{m-k}y^{(k-1)}(0) \\
&= s^mY(s) - s^{m-1}y(0) - s^{m-2}y^{(1)}(0) - \\
&\qquad \cdots - y^{(m-1)}(0)
\end{aligned} \tag{1.34}$$

1.1.8　ラプラス変換の諸性質

前節で示した性質のほかにも，ラプラス変換に関する性質としてさまざまなものが存在する．$f(t)$ のラプラス変換を

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{1.35}$$

とすると，つぎの性質が成り立つ（証明は省略する）．

$a \neq 0$ とするとき，

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{1.36}$$

$b > 0$ とするとき，

$$\mathcal{L}[f(t-b)] = e^{-bs}F(s) \tag{1.37}$$

$$\mathcal{L}[f(t)e^{at}] = F(s-a) \tag{1.38}$$

積分則：

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s) \tag{1.39}$$

関数 $f_1(t)$ と $f_2(t)$ に対して，つぎの式で表される関数 $f_1 * f_2(t)$ は，f_1 と f_2 の**たたみ込み**と呼ばれる．

$$f_1 * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \tag{1.40}$$

たたみ込み $f_1 * f_2(t)$ のラプラス変換と，$f_1(t)$ と $f_2(t)$ のラプラス変換の間にはつぎの関係が成り立つ．

たたみ込みのラプラス変換：

$$\mathcal{L}[f_1 * f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)]\mathcal{L}[f_2(t)] \tag{1.41}$$

すなわち，たたみ込みのラプラス変換は，それぞれのラプラス変換の積と等しい．

初期値定理：

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{1.42}$$

最終値定理：

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{1.43}$$

最終値の定理は定常状態での $f(t)$ の値を求めるときに用いられることがある．

1.1.9　代表的な関数のラプラス変換

図 1.5 にはないが，$f(t)$ が三角関数の場合について考えてみよう．

$$f(t) = \sin\omega t \tag{1.44}$$

のラプラス変換を，指数関数のラプラス変換を利用して求めてみる．
オイラーの公式より，

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t\ ,\quad e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t \tag{1.45}$$

が成り立つ．これらから $\sin\omega t$ を

$$\sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \tag{1.46}$$

と指数関数を用いて表わすことができる．これより，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin\omega t] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right] & (1.47)\\
&= \frac{1}{2j}\left(\mathcal{L}[e^{j\omega t}] - \mathcal{L}[e^{-j\omega t}]\right) & (1.48)\\
&= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) & (1.49)\\
&= \frac{\omega}{s^2+\omega^2} & (1.50)
\end{aligned}$$

となる．

(1.47) 式から (1.48) 式を導くとき，第 1.1.6 節の「ラプラス変換の線形性」を利用している．(1.48) 式から (1.49) 式を導くとき，(1.25) 式を用いている．

このようにさまざまな関数に対して，そのラプラス変換が求められる．これまで扱ってきたものも含めて，代表的な関数に対するラプラス変換をまとめておく．

$$\mathcal{L}[u_s(t)] = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \tag{1.51}$$

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \tag{1.52}$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{1.53}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a} \tag{1.54}$$

$$\mathcal{L}[te^{-at}] = \frac{1}{(s+a)^2} \tag{1.55}$$

$$\mathcal{L}[t^n e^{-at}] = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}} \tag{1.56}$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{1.57}$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2} \tag{1.58}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \tag{1.59}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2} \tag{1.60}$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (\delta(t) \text{ はデルタ関数}) \tag{1.61}$$

1.1.10　ラプラス逆変換

(1.54) 式より，

$$\mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{s+2} \tag{1.62}$$

であることから，$F(s) = \frac{1}{s+2}$ のラプラス逆変換は

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = e^{-2t} \tag{1.63}$$

となる．(1.51) 式 ∼ (1.61) 式はラプラス変換を示したものであるが，上のようにラプラス逆変換にも利用できる．

上と同様な考え方で，(1.51) 式より，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1 \tag{1.64}$$

となる．

微分方程式を解くときには，ラプラス逆変換は解法の後半で利用される．

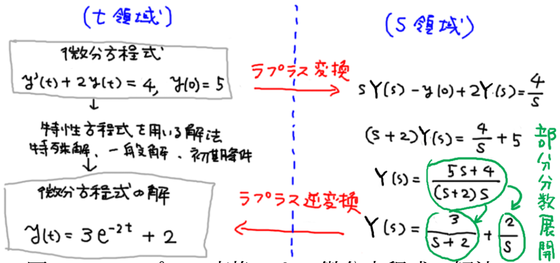

図 1.18　ラプラス変換による微分方程式の解法

図 1.18 の中の下方で

$$Y(s) = \frac{5s+4}{(s+2)s} = \frac{3}{s+2} + \frac{2}{s} \tag{1.65}$$

をラプラス逆変換して，

$$y(t) = 3e^{-2t} + 2 \tag{1.66}$$

を求めている．ここで注目してほしいのは，ラプラス逆変換を行う前に準備として，

$$\frac{5s+4}{(s+2)s} = \frac{3}{s+2} + \frac{2}{s} \tag{1.67}$$

という変形を行っているところである．これは「**部分分数展開**」と呼ばれる．(1.51) 式 ～ (1.61) 式には $\frac{5s+4}{(s+2)s}$ の形に該当するものはないが，$\frac{3}{s+2}$ と $\frac{2}{s}$ の逆変換は

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+2} + \frac{2}{s}\right] \\
&= 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] \\
&= 3e^{-2t} + 2
\end{aligned} \tag{1.68}$$

と容易にできる．ここで，(1.67) 式の部分分数展開の目的は，ラプラス逆変換が容易にできる形に変形することである．

つぎの節では部分分数展開の計算方法について説明する．

1.1.11　部分分数展開を用いたラプラス逆変換

基本的な場合

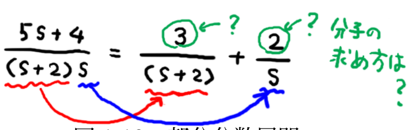

図 1.19　部分分数展開

図 1.19 の部分分数展開において，分母については左辺の分母を因数分解した因子 $s+2$ と s で決まる．一方，分子の 3 と 2 はどうやって求めればよいだろうか．

分子の簡単な計算方法としてつぎの方法がある．

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{n(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \\
&= \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{k_n}{s-p_n}
\end{aligned} \tag{1.69}
$$

と部分分数展開するとき，各項の分子に現れる k_i $(i = 1, \cdots, n)$ はつぎの式で求められる．

$$
k_i = (s-p_i)Y(s)\Big|_{s=p_i} \tag{1.70}
$$

つぎの例題を見てみよう．

$$
Y(s) = \frac{5s+4}{(s+2)s} \tag{1.71}
$$

を部分分数展開して，ラプラス逆変換を求めよ．

k_1, k_2 を未知数として

$$
Y(s) = \frac{5s+4}{(s+2)s} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s} \tag{1.72}
$$

とする．(1.70) 式より，

$$
\begin{aligned}
k_1 &= (s+2)Y(s)\Big|_{s=-2} \\
&= \frac{5s+4}{s}\Big|_{s=-2} \\
&= \frac{5\cdot(-2)+4}{-2} \\
&= 3
\end{aligned} \tag{1.73}
$$

$$
\begin{aligned}
k_2 &= sY(s)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{5s+4}{s+2}\Big|_{s=0} \\
&= \frac{5\cdot 0+4}{0+2} \\
&= 2
\end{aligned} \tag{1.74}
$$

となる．これらを (1.72) 式に代入して

$$
Y(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{2}{s} \tag{1.75}
$$

として部分分数展開が求められる．これを (1.51) 式と (1.54) 式を用いてラプラス逆変換すると，

$$
y(t) = 3e^{-2t} + 2 \tag{1.76}
$$

となる．

分母に 2 乗がある場合

例えば，

$$Y(s) = \frac{s^2+3s+1}{(s-2)^2(s-1)} \tag{1.77}$$

のように，分母に ( )^2 が含まれている場合には注意を要する．この場合，

$$Y(s) = \frac{s^2+3s+1}{(s-2)^2(s-1)} = \frac{k_1}{(s-2)^2} + \frac{k_2}{s-2} + \frac{k_3}{s-1} \tag{1.78}$$

の形に展開する．このときの分子の求め方として，つぎの方法がある．

$$Y(s) = \frac{k_1}{(s-p_1)^2} + \frac{k_2}{s-p_1} + \frac{k_3}{s-p_2} \tag{1.79}$$

と部分分数展開する場合，分子の係数は

$$k_1 = (s-p_1)^2 Y(s)\,\Big|_{s=p_1} \tag{1.80}$$

$$k_2 = \frac{d}{ds}[(s-p_1)^2 Y(s)]\,\Big|_{s=p_1} \tag{1.81}$$

$$k_3 = (s-p_2)Y(s)\,\Big|_{s=p_2} \tag{1.82}$$

で求められる．

例題を解いてみよう．

$$Y(s) = \frac{s^2+3s+1}{(s-2)^2(s-1)} \tag{1.83}$$

を部分分数展開して，ラプラス逆変換を求めよ．

k_1, k_2, k_3 を未知数として，

$$Y(s) = \frac{s^2+3s+1}{(s-2)^2(s-1)} = \frac{k_1}{(s-2)^2} + \frac{k_2}{s-2} + \frac{k_3}{s-1} \tag{1.84}$$

とする．(1.80) 式より，

$$\begin{aligned} k_1 &= (s-2)^2 Y(s)\,\Bigg|_{s=2} \\ &= \frac{s^2+3s+1}{s-1}\,\Bigg|_{s=2} \\ &= \frac{4+6+1}{1} \\ &= 11 \end{aligned} \tag{1.85}$$

(1.81) 式より，

$$
\begin{aligned}
k_2 &= \frac{d}{ds}[(s-2)^2 Y(s)]\Bigg|_{s=2} \\
&= \frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+3s+1}{s-1}\right]\Bigg|_{s=2} \\
&= \frac{(2s+3)(s-1)-(s^2+3s+1)\cdot 1}{(s-1)^2}\Bigg|_{s=2} \\
&= \frac{7-11}{1} \\
&= -4 \qquad (1.86)
\end{aligned}
$$

(1.82) 式より，

$$
\begin{aligned}
k_3 &= (s-1)Y(s)\Bigg|_{s=1} \\
&= \frac{s^2+3s+1}{(s-2)^2}\Bigg|_{s=1} \\
&= \frac{1+3+1}{1} \\
&= 5 \qquad (1.87)
\end{aligned}
$$

と求められる．これらを (1.84) 式に代入すると

$$
Y(s) = \frac{11}{(s-2)^2} + \frac{-4}{s-2} + \frac{5}{s-1} \qquad (1.88)
$$

となり，このラプラス逆変換は

$$
y(t) = 11te^{2t} - 4e^{2t} + 5e^{t} \qquad (1.89)
$$

となる．なお，上式を導き出すとき，(1.55) 式から得られる

$$
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)^2}\right] = te^{-at} \qquad (1.90)
$$

を用いた．

（補足）：

なぜ (1.70) 式なのか，なぜ (1.81) 式なのか，それを例を用いて説明すると，図 1.20 および図 1.21 のようになる．

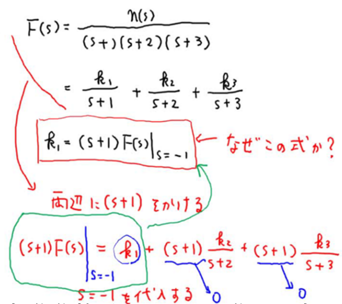

図 1.20　部分分数展開における分子を求める式

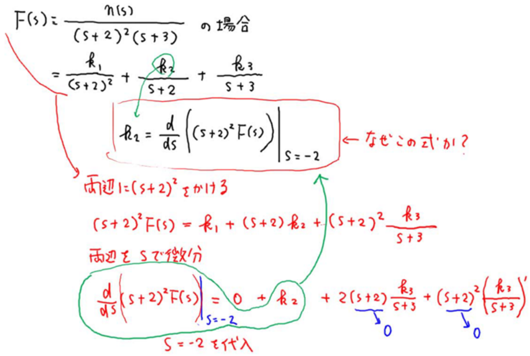

図 1.21　部分分数展開における分子を求める式

分母に 3 乗の因子がある場合の部分分数展開

例えば，

$$Y(s) = \frac{n(s)}{(s-p_1)^3(s-p_2)} \tag{1.91}$$

の場合，

$$Y(s) = \frac{k_{13}}{(s-p_1)^3} + \frac{k_{12}}{(s-p_1)^2} + \frac{k_{11}}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} \tag{1.92}$$

と部分分数展開する．このとき分子に現れる係数はつぎの式によって求められる．

$$k_{13} = (s-p_1)^3Y(s)\Big|_{s=p_1} \tag{1.93}$$

$$k_{12} = \frac{d}{ds}[(s-p_1)^3Y(s)]\Big|_{s=p_1} \tag{1.94}$$

$$k_{11} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}[(s-p_1)^3Y(s)]\Big|_{s=p_1} \tag{1.95}$$

$$k_2 = (s-p_2)Y(s)\Big|_{s=p_2} \tag{1.96}$$

分母に複素数が現れる場合

例えば，

$$Y(s) = \frac{n(s)}{(s+\alpha+j\omega)(s+\alpha-j\omega)(s+\sigma)} \tag{1.97}$$

のように分母に複素数が現れることがある．

この場合，

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{k_1(s+a)+k_2\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2} + \frac{k_3}{s+\sigma} \\ &= k_1\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2} + k_2\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} + \frac{k_3}{s+\sigma} \end{aligned} \tag{1.98}$$

と変形する．上式の k_3 の値は (1.70) 式を用いれば求められるが，k_1 と k_2 の値を求めるにはいくつかの方法がある．（後の例題で説明する）．k_1, k_2, k_3 の値が求められたら，(1.60) 式，(1.59) 式，

(1.54) 式の

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}\right]=e^{-at}\cos\omega t \tag{1.99}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\right]=e^{-at}\sin\omega t \tag{1.100}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\sigma}\right]=e^{-\sigma t} \tag{1.101}$$

を用いてラプラス逆変換して,

$$y(t)=k_1e^{-at}\cos\omega t+k_2e^{-at}\sin\omega t+k_3e^{-\sigma t} \tag{1.102}$$

とする.

（補足） 上とは異なる方法もある．まず,

$$Y(s)=\frac{\ell_1}{s+\alpha+j\omega}+\frac{\ell_2}{s+\alpha-j\omega}+\frac{\ell_3}{s+\sigma} \tag{1.103}$$

と変形する．分子の ℓ_i $(i=1,2,3)$ の値は (1.70) 式を用いて計算する．すると，ℓ_3 は実数になるが，ℓ_1 と ℓ_2 は

$$\ell_1=c+jd\ ,\quad \ell_2=\bar{\ell}_1=c-jd \tag{1.104}$$

のように，互いに共役な複素数になる．その後,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\alpha+j\omega}\right]=e^{-(\alpha+j\omega)t} \tag{1.105}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\alpha-j\omega}\right]=e^{-(\alpha-j\omega)t} \tag{1.106}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\sigma}\right]=e^{-\sigma t} \tag{1.107}$$

を用いてラプラス逆変換を実行して指数関数にする．このままだと指数関数にも複素数が含まれているが，指数関数にオイラーの公式を用いながらつぎのように変形すると，最終的に実数の関数が得られる．

$$\begin{aligned}
y(t)&=\ell_1e^{-(\alpha+j\omega)t}+\ell_2e^{-(\alpha-j\omega)t}+\ell_3e^{\sigma t}\\
&=(c+jd)e^{-(\alpha+j\omega)t}+(c-jd)e^{-(\alpha-j\omega)t}+\ell_3e^{\sigma t}\\
&=(c+jd)e^{-\alpha t}(\cos\omega t-j\sin\omega t)\\
&\quad+(c-jd)e^{-\alpha t}(\cos\omega t+j\sin\omega t)+\ell_3e^{\sigma t}\\
&=2ce^{-\alpha t}\cos\omega t+2de^{-\alpha t}\sin\omega t+\ell_3e^{\sigma t}
\end{aligned} \tag{1.108}$$

1.1.12　ラプラス変換による常微分方程式の解法

すでに図 1.1 で見たように，ラプラス変換を用いた線形定数係数常微分方程式の解法はつぎの手順で表される．

(a) 与えられた微分方程式の両辺をラプラス変換する．このとき,
未知関数 $y(t)$ のラプラス変換を $Y(s)$,
$y'(t)$ のラプラス変換を $sY(s)-y(0)$,
$y''(t)$ のラプラス変換を $s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)$
とする.

(b) 初期条件（$y(0)$, $y'(0)$ の値）を代入する.

(c) こうして得られた方程式を $Y(s)$ について解いて,

$$Y(s)=\cdots$$

の形に変形する.

(d) $Y(s)$ を部分分数展開する.

(e) $Y(s)$ をラプラス逆変換して $y(t)$ を求める.

1.1.13　例題

つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け．

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 15\ ,\quad y(0) = 0\ ,\quad y'(0) = 1 \tag{1.109}$$

（解答）

両辺をラプラス変換すると，

$$\begin{aligned} &s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \\ &\quad +4(sY(s) - y(0)) + 3Y(s) = \frac{15}{s} \end{aligned}$$

となる．初期条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ を代入して，$Y(s)$ について解くと，

$$\begin{aligned} &s^2Y(s) - 1 + 4sY(s) + 3Y(s) = \frac{15}{s} \\ &(s^2 + 4s + 3)Y(s) = \frac{15}{s} + 1 = \frac{s+15}{s} \\ &Y(s) = \frac{s+15}{s(s+1)(s+3)} \end{aligned}$$

が得られる．ここで

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s+15}{s(s+1)(s+3)} \\ &= \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+3} \end{aligned}$$

という部分分数展開を考える．分子の各係数は，

$$\begin{aligned} k_1 &= sY(s)\Big|_{s=0} = \frac{15}{1\cdot 3} = 5 \\ k_2 &= (s+1)Y(s)\Big|_{s=-1} = \frac{14}{(-1)\cdot 2} = -7 \\ k_3 &= (s+3)Y(s)\Big|_{s=-3} = \frac{12}{(-3)\cdot(-2)} = 2 \end{aligned}$$

と求められる．これらを代入して，

$$Y(s) = \frac{5}{s} - \frac{7}{s+1} + \frac{2}{s+3}$$

となる．これをラプラス逆変換して，

$$y(t) = 5 - 7e^{-t} + 2e^{-3t}$$

が微分方程式の解になる．

つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け．

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2e^{-4t}\ ,\quad y(0) = 0\ ,\quad y'(0) = 1 \tag{1.110}$$

（解答）

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=2e^{-4t}$$

の両辺をラプラス変換する．

$$s^2Y(s)-s\underbrace{y(0)}_{=0}-\underbrace{y'(0)}_{=1}$$
$$+5(sY(s)-\underbrace{y(0)}_{=0})+6Y(s)=2\cdot\frac{1}{s+4}$$
$$s^2Y(s)-1+5sY(s)+6Y(s)=\frac{2}{s+4}$$
$$(s^2+5s+6)Y(s)=\frac{2}{s+4}+1=\frac{s+6}{s+4}$$
$$Y(s)=\frac{s+6}{(s+2)(s+3)(s+4)}=\frac{k_1}{s+2}+\frac{k_2}{s+3}+\frac{k_3}{s+4}$$

$$k_1 = (s+2)Y(s)\Big|_{s=-2}=\frac{4}{1\cdot 2}=2$$
$$k_2 = (s+3)Y(s)\Big|_{s=-3}=\frac{3}{(-1)\cdot 1}=-3$$
$$k_3 = (s+4)Y(s)\Big|_{s=-4}=\frac{2}{(-2)\cdot(-1)}=1$$

$$Y(s)=\frac{2}{s+2}+\frac{-3}{s+3}+\frac{1}{s+4}$$

ラプラス逆変換をして，

$$y(t)=2e^{-2t}-3e^{-3t}+e^{-4t}$$

図 1.22　ラプラス変換による微分方程式の解法

つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け．

$$y''(t)+4y'(t)+13y(t)=13e^{-4t}\ ,\quad y(0)=0\ ,\quad y'(0)=1 \tag{1.111}$$

この問題では $Y(s)$ の分母が $s^2+4s+13$ となり，因数分解すると複素数が生じる．この資料では，その後の変形が異なる 3 通りの解法を示す．

（解法１） 両辺をラプラス変換する．

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)$$
$$+4(sY(s)-y(0))+13Y(s)=\frac{13}{s+4}$$
$$s^2Y(s)-1+4sY(s)+13Y(s)=\frac{13}{s+4}$$
$$(s^2+4s+13)Y(s)=\frac{13}{s+4}+1=\frac{s+17}{s+4}$$
$$Y(s)=\frac{s+17}{(s^2+4s+13)(s+4)}$$

となる．ここで，(1.98) 式に倣い，

$$Y(s)=\frac{s+17}{\{(s+2)^2+3^2\}(s+4)} \tag{1.112}$$
$$=k_1\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}+k_2\frac{3}{(s+2)^2+3^2}+\frac{k_3}{s+4} \tag{1.113}$$

とする．まずは，求めやすい k_3 から求めると，

$$\begin{aligned}
k_3 &= (s+4)Y(s)\Big|_{s=-4} \\
&= \frac{s+17}{s^2+4s+13}\Big|_{s=-4} \\
&= \frac{-4+17}{16-16+13} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{1.114}$$

が得られる．(1.113) 式を，$k_3 = 1$ を代入しながらまとめると

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{k_1(s+2)(s+4) + k_2 \cdot 3(s+4) + s^2 + 4s + 13}{\{(s+2)^2+3^2\}(s+4)} \\
&= \frac{(k_1+1)s^2 + (6k_1+3k_2+4)s + 8k_1 + 12k_2 + 13}{\{(s+2)^2+3^2\}(s+4)}
\end{aligned} \tag{1.115}$$

となる．これの分子と (1.112) 式の分子 $s+17$ を比較すると

$$k_1 + 1 = 0 \tag{1.116}$$

$$6k_1 + 3k_2 + 4 = 1 \tag{1.117}$$

$$8k_1 + 12k_2 + 13 = 17 \tag{1.118}$$

なので，この連立方程式を解いて

$$k_1 = -1\ ,\quad k_2 = 1 \tag{1.119}$$

が得られる．これらと $k_3 = 1$ を (1.113) 式に代入すると

$$Y(s) = -\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{3}{(s+2)^2+3^2} + \frac{1}{s+4} \tag{1.120}$$

となる．これに対して (1.99) 式〜(1.101) 式のラプラス逆変換を適用すると，

$$y(t) = -e^{-2t}\cos 3t + e^{-2t}\sin 3t + e^{-4t} \tag{1.121}$$

が解として求められる．

つぎの解法では，k_1, k_2 を求めるとき少し工夫をしている．

（解法２）両辺をラプラス変換する．

$$\begin{aligned}
&s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \\
&\qquad +4(sY(s) - y(0)) + 13Y(s) = \frac{13}{s+4} \\
&s^2Y(s) - 1 + 4sY(s) + 13Y(s) = \frac{13}{s+4} \\
&(s^2+4s+13)Y(s) = \frac{13}{s+4} + 1 = \frac{s+17}{s+4} \\
&Y(s) = \frac{s+17}{(s^2+4s+13)(s+4)}
\end{aligned}$$

となる．ここで，(1.98) 式に倣い，

$$Y(s) = \frac{s+17}{\{(s+2)^2+3^2\}(s+4)} \tag{1.122}$$

$$= \frac{k_1(s+2)+k_2\cdot 3}{(s+2)^2+3^2} + \frac{k_3}{s+4} \tag{1.123}$$

とする．上式の両辺に $(s+2)^2+3^2$ を掛けて，$s=-2+3j$ を代入すると

$$\{(s+2)^2+3^2\}Y(s)\Big|_{s=-2+3j} = \{k_1(s+2)+k_2\cdot 3\}\Big|_{s=-2+3j} \tag{1.124}$$

となる．(1.122) 式を用いると上式は

$$\frac{s+17}{s+4}\Big|_{s=-2+3j} = \{k_1(s+2)+k_2\cdot 3\}\Big|_{s=-2+3j} \tag{1.125}$$

となり，さらにつぎのように整理する．

$$\frac{(-2+3j)+17}{(-2+3j)+4} = k_1\{(-2+3j)+2\}+k_2\cdot 3 \tag{1.126}$$

$$\frac{15+3j}{2+3j} = 3k_2+3k_1 j$$

$$\frac{5+j}{2+3j} = k_2+k_1 j$$

$$5+j = (k_2+k_1 j)(2+3j) = -3k_1+2k_2+(2k_1+3k_2)j$$

上式の両辺で，実部と虚部をそれぞれ比較すると

$$5 = -3k_1+2k_2\ ,\quad 1 = 2k_1+3k_2 \tag{1.127}$$

となり，連立方程式を解いて

$$k_1 = -1\ ,\quad k_2 = 1 \tag{1.128}$$

が得られる．(1.123) 式の k_3 は

$$k_3 = (s+4)Y(s)\Big|_{s=-4}$$

$$= \frac{s+17}{s^2+4s+13}\Big|_{s=-4}$$

$$= 1 \tag{1.129}$$

と求められる．これと (1.128) 式の $k_1=-1$, $k_2=1$ を (1.123) 式に代入すると

$$Y(s) = -\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{3}{(s+2)^2+3^2} + \frac{1}{s+4} \tag{1.130}$$

となる．これに対して (1.99) 式〜(1.101) 式のラプラス逆変換を適用すると，

$$y(t) = -e^{-2t}\cos 3t + e^{-2t}\sin 3t + e^{-4t} \tag{1.131}$$

が解として求められる．

つぎの解法は，複素数を使ったまま指数関数へ逆変換する方法である．

（解法３） 両辺をラプラス変換する．

$$\begin{aligned}
&s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\\
&\quad +4(sY(s) - y(0)) + 13Y(s) = \frac{13}{s+4}\\
&s^2Y(s) - 1 + 4sY(s) + 13Y(s) = \frac{13}{s+4}\\
&(s^2+4s+13)Y(s) = \frac{13}{s+4} + 1 = \frac{s+17}{s+4}\\
&Y(s) = \frac{s+17}{(s^2+4s+13)(s+4)}
\end{aligned}$$

となる．ここで，(1.103) 式に倣い，

$$Y(s) = \frac{s+17}{\{(s+2)^2+3^2\}(s+4)} \tag{1.132}$$

$$= \frac{k_1}{s+2+3j} + \frac{k_2}{s+2-3j} + \frac{k_3}{s+4} \tag{1.133}$$

とする．k_1, k_2, k_3 を (1.70) 式にしたがって求めていく．

$$\begin{aligned}
k_1 &= (s+2+3j)Y(s)\Big|_{s=-2-3j}\\
&= \frac{s+17}{(s+2-3j)(s+4)}\Big|_{s=-2-3j}\\
&= \frac{-2-3j+17}{(-2-3j+2-3j)(-2-3j+4)}\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{5-j}{3+2j}\\
&= -\frac{1}{2}(1-j)
\end{aligned} \tag{1.134}$$

となる．k_2 はつぎのように k_1 の複素共役として求められる．

$$\begin{aligned}
k_2 &= (s+2-3j)Y(s)\Big|_{s=-2+3j}\\
&= \bar{k}_1\\
&= -\frac{1}{2}(1+j)
\end{aligned} \tag{1.135}$$

k_3 は (1.70) 式にしたがい，

$$\begin{aligned}
k_3 &= (s+4)Y(s)\Big|_{s=-4}\\
&= \frac{s+17}{s^2+4s+13}\Big|_{s=-4}\\
&= 1
\end{aligned} \tag{1.136}$$

と求められる．これら k_1, k_2, k_3 を (1.133) 式に代入すると

$$Y(s) = -\frac{1}{2}(1-j)\frac{1}{s+2+3j} - \frac{1}{2}(1+j)\frac{1}{s+2-3j} + \frac{1}{s+4} \tag{1.137}$$

となる．これに対して (1.101) 式のラプラス逆変換を適用すると，

$$y(t) = -\frac{1}{2}(1-j)e^{-(2+3j)t} - \frac{1}{2}(1+j)e^{-(2-3j)t} + e^{-4t}$$

となるが，オイラーの公式を用いて

$$e^{-(2\pm 3j)t} = e^{-2t}e^{\mp 3tj} = e^{-2t}(\cos 3t \mp j\sin 3t) \tag{1.138}$$

を代入し，(1.108) 式と同様な変形を行うと

$$y(t) = -e^{-2t}\cos 3t + e^{-2t}\sin 3t + e^{-4t} \tag{1.139}$$

が解として求められる．

以上で 3 通りの解法を示したが，結局のところ「解法 1」が最もわかりやすく，計算量も少ないと思われる．

つぎの問題では，$Y(s)$ の分母に 2 乗が含まれる．

> つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け．
>
> $$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-2t}\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1 \tag{1.140}$$

（解答）両辺をラプラス変換して

$$\begin{aligned}
&s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \\
&\quad +3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = \frac{1}{s+2} \\
&s^2Y(s) - s - 1 + 3sY(s) - 3 + 2Y(s) = \frac{1}{s+2} \\
&(s^2+3s+2)Y(s) = \frac{1}{s+2} + s + 4 = \frac{s^2+6s+9}{s+2} \\
&Y(s) = \frac{s^2+6s+9}{(s+2)^2(s+1)} = \frac{k_1}{(s+2)^2} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{s+1}
\end{aligned}$$

(1.80) 式より，

$$\begin{aligned}
k_1 &= (s+2)^2Y(s)\Big|_{s=-2} \\
&= \frac{s^2+6s+9}{s+1}\Big|_{s=-2} \\
&= \frac{4-12+9}{-1} \\
&= -1
\end{aligned} \tag{1.141}$$

(1.81) 式より，

$$
\begin{aligned}
k_2 &= \frac{d}{ds}[(s+2)^2 Y(s)]\Big|_{s=-2} \\
&= \frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+6s+9}{s+1}\right]\Big|_{s=-2} \\
&= \frac{(2s+6)(s+1)-(s^2+6s+9)\cdot 1}{(s+1)^2}\Big|_{s=-2} \\
&= \frac{2\cdot(-1)-(4-12+9)}{1} \\
&= -3
\end{aligned}
\tag{1.142}
$$

(1.82) 式より，

$$
\begin{aligned}
k_3 &= (s+1)Y(s)\Big|_{s=-1} \\
&= \frac{s^2+6s+9}{(s+2)^2}\Big|_{s=-1} \\
&= \frac{1-6+9}{1} \\
&= 4
\end{aligned}
\tag{1.143}
$$

$$
Y(s) = \frac{-1}{(s+2)^2} + \frac{-3}{s+2} + \frac{4}{s+1} \tag{1.144}
$$

これをラプラス逆変換して

$$
y(t) = -te^{-2t} - 3e^{-2t} + 4e^{-t} \tag{1.145}
$$

が解となる．

（補足）

これと同じ問題を特性方程式で解いてみよう．

> つぎの微分方程式を特性方程式を用いた未定定数法で解け．
>
> $$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-2t}\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1 \tag{1.146}$$

(1)　特性方程式は

$$
\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0 \tag{1.147}
$$

なので，$\lambda = -1, -2$ を用いて斉次方程式の一般解を

$$
y_0(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} \tag{1.148}
$$

とする．

(2)　微分方程式の右辺が e^{-2t} なので，d を未知数として

$$
y_p(t) = de^{-2t} \tag{1.149}
$$

と仮定する．これを微分方程式

$$
y_p''(t) + 3y_p'(t) + 2y_p(t) = e^{-2t} \tag{1.150}
$$

に代入すると，

$$4de^{-2t} - 6de^{-2t} + 2de^{-2t} = e^{-2t} \tag{1.151}$$

となり，

$$4d - 6d + 2d = 1 \tag{1.152}$$

すなわち，

$$0 = 1 \tag{1.153}$$

となってしまう．成立しない式が出てきて，未知数 d の値も求められない．

上の状況がなぜ生じたというと，(1.148) 式に e^{-2t} が含まれいるにもかかわらず，(1.149) 式で de^{-2t} としてしまったからである．e^{-2t} は斉次方程式の解なので，de^{-2t} も

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0 \tag{1.154}$$

を満たす．したがって

$$y_p''(t) + 3y_p'(t) + 2y_p(t) = e^{-2t} \tag{1.155}$$

を満たす特殊解として de^{-2t} は適していない．

特性方程式で解くとこのような問題が生じるが，先の例で見たように，ラプラス変換で解いていけば難なく解くことができる．この点がラプラス変換を用いる利点の一つである．

ところでこの例題を特性方程式で解くことは不可能ではない．このような場合，(2) の段階における特殊解の候補として，e^{-2t} に t を掛けた te^{-2t} を用いるのが有効である．そして，k を未知数として

$$y_p(t) = kte^{-2t} \tag{1.156}$$

とする（図 1.23 参照）．

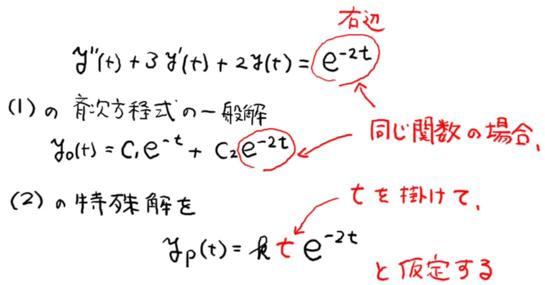

図 1.23　特殊解の設定

なぜ t を掛けるのか？その理由はやや難しいが，文献（例えば「常微分方程式とその応用」三木忠夫，コロナ社」）に書かれている．

では，(2) からやり直してみよう．

(2)　微分方程式の右辺は e^{-2t} だが，斉次方程式の一般解に e^{-2t} が含まれているので，e^{-2t} に t を掛けて，k を未知数とした

$$y_p(t) = kte^{-2t} \tag{1.157}$$

と仮定する．

$$y_p'(t) = ke^{-2t} - 2kte^{-2t} \tag{1.158}$$

$$\begin{aligned} y_p''(t) &= -2ke^{-2t} - 2ke^{-2t} + 4kte^{-2t} \\ &= -4ke^{-2t} + 4kte^{-2t} \end{aligned} \tag{1.159}$$

であり，これらを微分方程式

$$y_p''(t) + 3y_p'(t) + 2y_p(t) = e^{-2t} \tag{1.160}$$

に代入して，e^{-2t} を消去すると

$$-4k + 4kt + 3(k - 2kt) + 2kt = 1 \tag{1.161}$$

となり，

$$k = -1 \tag{1.162}$$

が求められる．よって，非斉次方程式の特殊解を

$$y_p(t) = -te^{-2t} \tag{1.163}$$

とする．
(3)　非斉次方程式の一般解を

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} - te^{-2t} \tag{1.164}$$

とする．
(4) 初期条件 $y(0) = 1$ より，

$$C_1 + C_2 = 1 \tag{1.165}$$

$$y'(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t} - e^{-2t} + 2te^{-2t} \tag{1.166}$$

と $y'(0) = 1$ より，

$$-C_1 - 2C_2 - 1 = 1 \tag{1.167}$$

が成り立つことが必要である．(1.165) 式と (1.167) 式から

$$C_1 = 4\ ,\quad C_2 = -3 \tag{1.168}$$

が得られ，

$$y(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t} - te^{-2t} \tag{1.169}$$

が解である．

1.1.14　システムの伝達関数

ラプラス変換の利用法として，前述のように「微分方程式を解く」ことがあるが，別の利用法として「システムを伝達関数として表す」ことがある．

例えば，入力が $u(t)$ と出力が $y(t)$ との関係が，微分方程式

$$y'(t) + 2y(t) = 4u(t) \tag{1.170}$$

で表されるシステムがあるとする（入力はステップ信号か，正弦波か，あるいはその他の信号かもしれないが，ここでは特に限定せず「$u(t)$」として表しておく）．上式をラプラス変換して，

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = 4U(s) \tag{1.171}$$

とする．ここで $y(t)$ の初期値 $y(0)$ を 0 とする（これは伝達関数を導くときの決り事と思えばよい）．すると上式は

$$(s+2)Y(s) = 4U(s) \tag{1.172}$$

と変形でき，これを $Y(s)$ について解くと

$$Y(s) = \frac{4}{s+2}U(s) \tag{1.173}$$

となる．こうしてシステムは図 1.24 のように表される．

ここで現れた $\frac{4}{s+2}$ は「システムの**伝達関数**」と呼ばれ，つぎのように $G(s)$ という記号で書き表される．

$$G(s) = \frac{4}{s+2} \tag{1.174}$$

システムの伝達関数を $G(s)$ とすれば，入力のラプラス変換 $U(s)$ と出力のラプラス変換 $Y(s)$ との関係は，(1.173) 式より，

$$Y(s) = G(s)U(s) \tag{1.175}$$

という簡潔な（微分を含まない）表現で書き表すことができる．

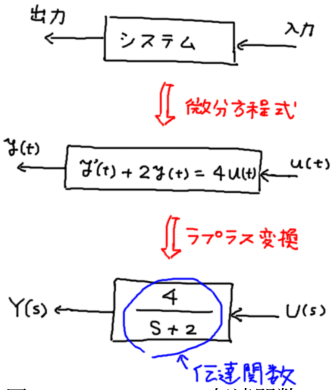

図 1.24　システムの伝達関数

図 1.24 はシステムの表現方法を変えていると見なすことができる．微分方程式 $y'(t) + 2y(t) = 4u(t)$ がシステムの特性（入出力関係）を表しているのと同様に，伝達関数 $G(s) = \frac{4}{s+2}$ もシステムの特性を表している．伝達関数を用いると，ある種の計算が簡単になったり，信号の周波数との関連づけが可能になるなどの利点が生じる（3 年生で履修する「制御工学 1」では，伝達関数を用いた制御系の解析・設計する方法を学ぶ）．

1.1.15　最終値の定理の利用法

伝達関数とラプラス変換を用いるとシステムの解析が容易になる例を一つ紹介しておく．
(1.43) 式で述べた「最終値の定理」はつぎのようなものである．

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{1.176}$$

これを用いると，システムの出力の定常値を簡単に求めることができる．つぎの問題について考えてみよう．

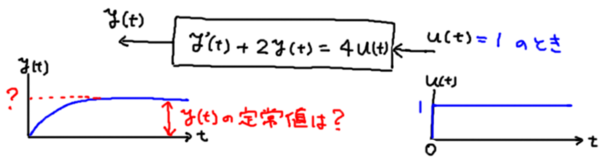

図 1.25　出力の定常値を求める問題

求めたい値は $\lim_{t\to\infty} y(t)$ であるので，(1.176) 式を用いて，

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) \tag{1.177}$$

で求められる．この右辺を考えていこう．この例の場合，(1.173) 式，(1.175) 式，および $u(t) = 1$ であることから，

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad G(s) = \frac{4}{s+2}\ , \quad U(s) = \frac{1}{s} \tag{1.178}$$

である．これらを用いて (1.177) 式を計算していくと，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)U(s) \\ &= \lim_{s\to 0} sG(s)\cdot\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} G(s) \\ &= G(0) \\ &= \frac{4}{0+2} = 2\end{aligned} \tag{1.179}$$

と求められる．

(1.179) 式を見ながら要約すると次のことが言える．**入力がステップ信号（$u(t)=1$） の場合には，出力の定常値は $G(0)$ で求められる．**

別の例として，

$$y'(t)+3y(t)=2u(t)\ ,\ y(0)=0\ ,\ \ u(t)=1 \tag{1.180}$$

ならば，伝達関数は $G(s)=\frac{2}{s+3}$ となり，これの s に 0 を代入して，$\lim_{t\to\infty} y(t)=\frac{2}{0+3}=\frac{2}{3}$ と簡単に求められる．

（注意）　ラプラス変換の最終値の定理

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{s\to 0} sY(s) \tag{1.181}$$

の使用に際しては，$sY(s)$ がある性質を満たしていなければならないという制限がある．その性質とは，$sY(s)$ の分母を 0 とする s を求めたとき，それらすべてにおいて，実数の場合は負，複素数の場合は実部が負でなければならない，ということである．

(1.178) 式の例の場合は大丈夫である．なぜなら，

$$sY(s)=s\cdot\frac{4}{s+2}\cdot\frac{1}{s}=\frac{4}{s+2} \tag{1.182}$$

であり，$sY(s)$ の分母 $s+2$ を 0 とする s は -2 であり，負だからである．

もし入力が正弦波で，$u(t)=\sin 3t$ の場合には，最終値の定理は使えない．この場合 $U(s)=\frac{3}{s^2+3^2}$ となり，

$$sY(s)=s\cdot\frac{4}{s+2}\cdot\frac{3}{s^2+3^2}=\frac{12s}{(s+2)(s^2+3^2)} \tag{1.183}$$

で，$sY(s)$ の分母 $(s+2)(s^2+3^2)$ を 0 とする s は $-2, 3j, -3j$ である．複素数 $3j$ と $-3j$ の実部は 0 であり，負ではないので最終値の定理を使うことができない．

入力が $u(t)=1$ でも伝達関数が

$$G(s)=\frac{4}{s-2} \tag{1.184}$$

の場合には，

$$sY(s)=s\cdot\frac{4}{s-2}\cdot\frac{1}{s}=\frac{4}{s-2} \tag{1.185}$$

となる．$sY(s)$ の分母 $s-2$ を 0 とする s は $+2$ であり，負ではないので最終値の定理を使うことはできない．

このように最終値の定理の使用に際しては注意が必要である．