# 制御工学のための行列とベクトル

山形大学工学部　村松鋭一

# 序文

現代制御理論の理解に必要な行列とベクトルについて書いています．10 年ぐらい前の授業の資料です（今はその授業はありません）．授業の資料はもっとたくさんあって，その一部を抜粋しています．

最終更新日： 2025 年 6 月 12 日

# 目次

# 第 1 章

# 行列とベクトル

## 1.1　行列とベクトルとスカラー

複数の数を一つにまとめて括弧でくくり，ベクトルや行列で表現しておくと，方程式や関係式を簡潔な形で表現できる．連立一次方程式のような複数の未知数が互いに絡み合った方程式でも，行列とベクトルでまとめてしまえば $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ のようにすっきりと書くことができる．

このような便利さがある一方，行列にはそれ特有の計算方法や注意が必要になったり，数がたくさん入っているため行列の特性がひと目で読み取りにくいなど，取り扱いが難しい面もある．

この章では，基礎的な行列とその特性，行列の計算法，行列の特性を表す値の求め方などを解説する．また，行列とベクトルを組み合わせた計算や方程式についても説明する．

### 1.1.1　行列

数を長方形にならべて括弧をつけたものは「行列」と呼ばれる．行列の要素となる数は実数あるいは複素数とする．横の並びを「行」，縦の並びを「列」という（図 1.1）．行の数が $m$，列の数が $n$ の行列を「$m$ 行 $n$ 列の行列」とか「$m \times n$ 行列」と呼ぶ．

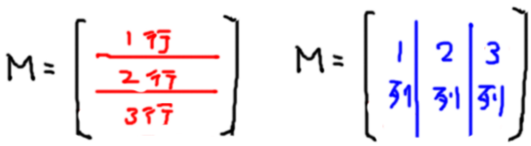


図 1.1　行列の行と列

例えば，

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

のように行列の要素を記号を使って表すとき，$i$ 行 $j$ 列の位置にある要素は $m_{ij}$ と書かれる．$m_{ij}$ を「行列 $\boldsymbol{M}$ の $(i, j)$ 要素」と言うことがある．

### 1.1.2　ベクトル

例えば

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

のように数が 1 列（あるいは 1 行）に並んだものを「ベクトル」と呼ぶ．(1.2) 式のように数が 3 つ並んだベクトルを「3 次元ベクトル」という．一般に，$n$ 個の数が並んだベクトルを「$n$ **次元ベクトル**」という．

(1.2) 式の左側の $\boldsymbol{v}_1$ のように数が縦に並んだベクトルを「**列ベクトル**」，右側の $\boldsymbol{v}_2$ のように横に並んだベクトルを「**行ベクトル**」ということがある．

「ベクトル」という用語は数学においてさまざまな使われ方をする．ベクトルと聞くと，平面や空間において方向と大きさをもつ有向線分（矢印）をイメージする人も多いだろう．座標系を設定した空間ではそのような有向線分は各座標軸の成分を用いて表されるので，成分表示したベクトルとして (1.2) 式を解釈してもよい．

### 1.1.3　スカラー

行列でもベクトルでもなく，単一の実数あるいは複素数を**スカラー**という．
(注意）このプリントでは，行列とベクトルを $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{v}$ のような太字で，スカラーを $a, k$ のような細字で表すので区別してほしい．

## 1.2　基礎的な行列

基礎的な行列の用語を確認しておく．各名称と行列の構造を憶えておくと良い．$i$, $j$, $n$ などの記号は正の整数を表すとする．

### 1.2.1　転置行列

例えば，行列 $\boldsymbol{M}$ が

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

と与えられたとしよう．これに対する転置行列 $\boldsymbol{M}^T$ は

$$\boldsymbol{M}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

となる．行列 $\boldsymbol{M}$ の $(i, j)$ 要素は，転置行列 $\boldsymbol{M}^T$ では $(j, i)$ 要素になっている．

### 1.2.2　正方行列

行の数と列の数が等しい行列を**正方行列**という．

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{bmatrix}$$

2行2列　　　3行3列

図 1.2　正方行列

正方でなく，縦に長い行列を「縦長行列」，横に長い行列を「横長行列」ということがある．

### 1.2.3　対称行列

$\boldsymbol{M}$ が正方行列であり，$\boldsymbol{M}^T = \boldsymbol{M}$ となるとき，$\boldsymbol{M}$ は**対称行列**であると呼ばれる．たとえば

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

は対称行列である．対称行列においては $(i,j)$ 要素と $(j,i)$ 要素の値が等しい．

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

図 1.3　対称行列

### 1.2.4　対角行列

正方行列における $(i,i)$ 要素（対角線上に並んでいる要素）を**対角要素**という．正方行列で，対角要素以外はすべて 0 の行列を**対角行列**という．対角行列は図 1.4 のような構造になっている．

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

すべて 0

対角要素

図 1.4　対角行列

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

のとき

$$\boldsymbol{M}^k = \begin{bmatrix} m_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22}^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m_{nn}^k \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

となる．このように，対角行列は $k$ 乗を計算しやすいという特徴を持つ．

### 1.2.5　上三角行列，下三角行列

図 1.5 のような構造を持つ行列を「上三角行列」，「下三角行列」という．

上三角行列　　　　　すべて 0

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

すべて 0　　　　　下三角行列

図 1.5　上三角行列と下三角行列

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{nn} \\ 0 & m_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & m_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & m_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

のとき

$$\boldsymbol{M}^k = \begin{bmatrix} m_{11}^k & ? & \cdots & ? \\ 0 & m_{22}^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ? \\ 0 & \cdots & 0 & m_{nn}^k \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

となる．「?」と記入されている要素は実際に計算してみないとわからないが，対角要素はすべて $k$ 乗になっているところに特徴がある．

同様に下三角行列でも，

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & m_{n,n-1} & m_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

のとき

$$\boldsymbol{M}^k = \begin{bmatrix} m_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ ? & m_{22}^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ ? & \cdots & ? & m_{nn}^k \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

となる．

### 1.2.6　単位行列

正方行列で，対角要素がすべて 1 でそれ以外の要素が 0 である行列を**単位行列**という．$n$ 行 $n$ 列の単位行列を $n$ **次単位行列**といい，$\boldsymbol{I}_n$ と書くことがある．

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

図 1.6　単位行列

任意の行列 $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ に対して，

$$\boldsymbol{MI} = \boldsymbol{M}, \quad \boldsymbol{IN} = \boldsymbol{N} \tag{1.12}$$

となる．行列に単位行列を掛けた結果は元の行列のままになる．

単位行列を $\boldsymbol{E}$ と書く本もあるが，このプリントでは $\boldsymbol{I}$ を用いる．

### 1.2.7　逆行列

正方行列 $\boldsymbol{M}$ に対して，

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{-1} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} \tag{1.13}$$

を満たす $\boldsymbol{M}^{-1}$ を $\boldsymbol{M}$ の**逆行列**という．

どんな正方行列にもそれに応じて必ず逆行列が存在するとは限らない．$\boldsymbol{M}$ に対する逆行列が存在するためには，$\boldsymbol{M}$ がある条件を満たしていなければならない．逆行列の存在条件については後述する．

### 1.2.8　正則行列

$\boldsymbol{M}$ は正方行列とする．$\boldsymbol{M}$ の逆行列が存在するとき，「$\boldsymbol{M}$ は**正則**である」という．$\boldsymbol{M}$ が正則行列となる条件（$\boldsymbol{M}$ の逆行列の存在条件）については後述する．

## 1.3　ベクトルと空間

第 1.1.2 節で，ベクトルを座標空間での有向線分（矢印）としてイメージできると述べた．この考え方を用いると，ベクトルの計算の意味を幾何学的にイメージできて理解しやすくなる．

### 1.3.1　平面上の 2 次元ベクトル

例えば，

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

のような 2 次元ベクトルは，図 1.7 のような $xy$ 平面上の有向線分の $x$ 成分と $y$ 成分を表示したものと見なすことができる．

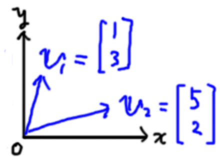


図 1.7　平面上の 2 次元ベクトル

### 1.3.2　空間上の 3 次元ベクトル

例えば，

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

のような 3 次元ベクトルは，図 1.8 のような $xyz$ 空間上の有向線分の $x$ 成分，$y$ 成分，$z$ 成分を表示したものと見なすことができる．

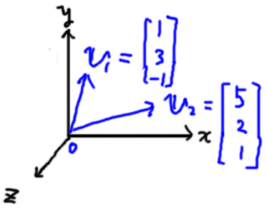


図 1.8　空間上の 3 次元ベクトル

（注意）このようにベクトルを $xy$ 平面や $xyz$ 空間での有向線分として考えるときには，要素に現れる数は実数であると考える．複素数を要素にもつベクトルもあるが，幾何学的なイメージは描きにくい．ただし，複素数を要素にもつベクトルであっても，後に説明するベクトルの和やスカラー倍は定義できて演算を行うことができる．そして，式で表されるベクトルの性質は，実数の場合と同様に成り立つ．

# 1.4　行列とベクトルの演算の意味

## 1.4.1　ベクトルのスカラー倍

例えば，

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

とする．これにスカラー 2 を掛けた

$$2\boldsymbol{v} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 \\ 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

や $-3$ を掛けた

$$(-3)\boldsymbol{v} = (-3)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3) \times 1 \\ (-3) \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

は，図 1.9 のように，方向は元の $\boldsymbol{v}$ と同方向か逆方向で，長さが 2 倍や 3 倍のベクトルになる．

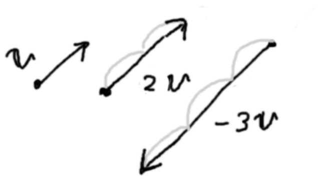


図 1.9　ベクトル $\boldsymbol{v}$ のスカラー倍

一般に，スカラー $k$ をベクトル $\boldsymbol{v}$ に掛けた $k\boldsymbol{v}$ はベクトルの「スカラー倍」と呼ばれる．

## 1.4.2　ベクトルの和

2 つのベクトルの和を図で表すと，図 1.10 のようになる．

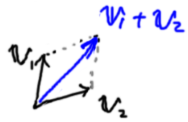


図 1.10　ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の和

2 つのベクトルが違う方向を向いているとき，それらの和のベクトルはまた違った方向を向く．上の例は 2 つのベクトルの和であるが，3 つのベクトルや $n$ 本のベクトルの和を考えることもできる．

### 1.4.3　ベクトルの線形結合

ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が与えられたとき，これらに対してスカラー倍と和を組みあわせて

$$2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_3 \tag{1.19}$$

のような新たなベクトルをつくることがある．これを「$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の線形結合」という．

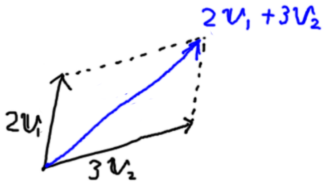


図 1.11　ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の線形結合

ベクトルの数は 2 でなくてもよい．一般に，$m$ 本のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ の**線形結合**は，スカラー $k_1, k_2, \cdots, k_m$ を用いて，

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{v}_m \tag{1.20}$$

と表される．線形結合は「**一次結合**」とも呼ばれる．

線形結合を用いて表される問題として，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ と，それらとは異なるベクトル $\boldsymbol{b}$ が与えられたとき，

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{b} \tag{1.21}$$

となるような $k_1, k_2, \cdots, k_m$ は存在するか，存在するならばそれらの値を求めよ，という問題がある（これは連立一次方程式の問題であり，後に詳しく述べる）．

このようにベクトルの線形結合は，それによって別のベクトルを作り出すときや，あるベクトルを線形結合の形に分解するときに現れる形式である．

### 1.4.4　行列とベクトルの積

ベクトル $\boldsymbol{v}_a$ に行列 $\boldsymbol{M}$ を掛けて，

$$\boldsymbol{v}_b = \boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_a \tag{1.22}$$

によって $\boldsymbol{v}_b$ を算出することがよくある．これは図 1.12 のように，ベクトル $\boldsymbol{v}_a$ を別のベクトル $\boldsymbol{v}_b$ に変換していると見なすことができる．

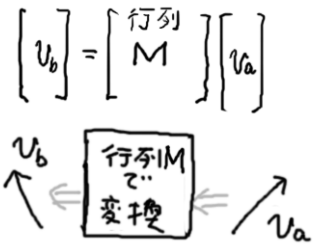


図 1.12　行列によるベクトルの変換

これがどういう変換を意味するかは，行列 $\boldsymbol{M}$ の性質によって決まる．
(1.22) 式の左辺を図 1.13 のように分解して考えることがある．

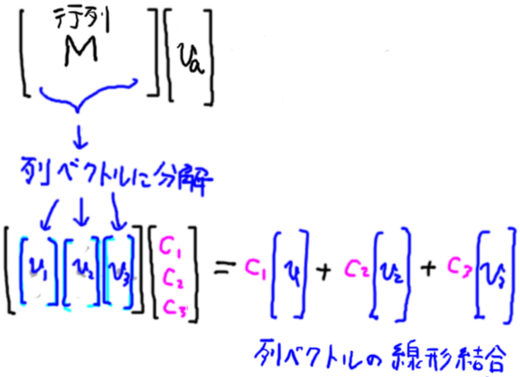


図 1.13　線形結合の生成

このようにすると，$\boldsymbol{v}_a$ から $\boldsymbol{v}_b$ への変換の特性を，$\boldsymbol{M}$ に含まれている列ベクトルの線形結合の性質として解析することができる．

### 1.4.5　行列の積

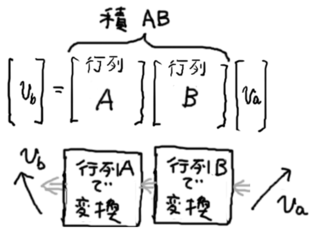


図 1.14　行列の積によるベクトルの変換

図 1.14 のように，行列 $\boldsymbol{B}$ でベクトルを変換した後，さらにそのベクトルを行列 $\boldsymbol{A}$ で変換した場合，行列の積 $\boldsymbol{AB}$ で変換したことと同じになる．この例に限らず，行列の積はさまざまな場面で現れる．

行列の積の計算においては，スカラー同士の積にはないいくつかの注意が必要となる．まず，行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の積が成立するためには，$\boldsymbol{A}$ の列の数と $\boldsymbol{B}$ の行の数が一致していなければならない．

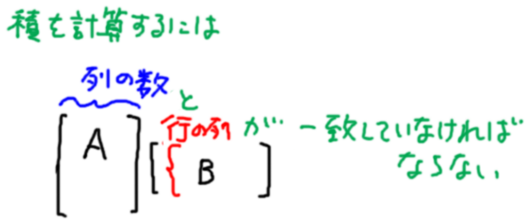


図 1.15　積の計算における注意

スカラー $a$ と $b$ の積では $ab = ba$ が成り立つが，行列の積において交換法則 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ は成り立たない．ただし，特殊な行列では成り立つこともある（例えば，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ がともに対角行列の場合など）．

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) \tag{1.23}$$

は成立するので，計算順序は変えてもよい．

### 1.4.6　逆行列を掛ける計算

スカラー $a, x, b$ が $ax = b$ を満たし $a \neq 0$ のとき，$x = \frac{b}{a}$ という変形が可能である．

行列 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{B}$ が

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} \tag{1.24}$$

を満たし，正方行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列が存在する場合には，

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \tag{1.25}$$

という変形が可能である．ここで $\boldsymbol{X} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}$ と書いてはいけない．また，$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{BA}^{-1}$ も誤りである．(1.25) 式への変形を詳細に書くと図 1.16 のようになる．

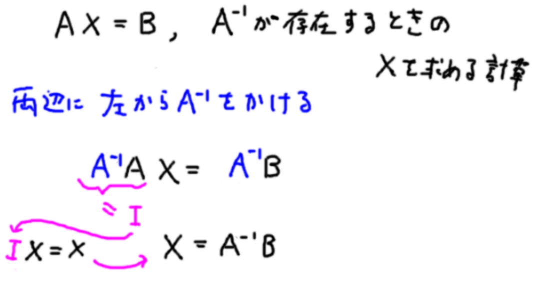


図 1.16　両辺に逆行列を掛ける計算

両辺に行列を掛けるときは，右から掛けるのか左から掛けるのかで違いがあるので注意しておこう．上の例では左から $\boldsymbol{A}^{-1}$ を掛けている．

### 1.4.7　積の転置行列，積の逆行列

転置行列に関して，

$$(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T\ ,\quad (\boldsymbol{ABC})^T = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T \tag{1.26}$$

が成り立つ．

逆行列に関しては，$\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{B}^{-1}$, $\boldsymbol{C}^{-1}$ が存在するとき，

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\ ,\quad (\boldsymbol{ABC})^{-1} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{1.27}$$

が成り立つ．

なお，$\boldsymbol{M}$ が正方行列で，$\boldsymbol{M}^{-1}$ が存在するとき，

$$(\boldsymbol{M}^T)^{-1} = (\boldsymbol{M}^{-1})^T \tag{1.28}$$

が成り立つ．

## 1.5　ベクトルについて

図 1.13 のように，行列をベクトルに分解して，その性質を調べることがある．行列の理論を学ぶためには，まずベクトルに関する理解を深めておくのがよい．ここでもう一度，ベクトルの基礎に戻って考察してみよう．

### 1.5.1　ベクトルの和をどうイメージするか

ベクトルを矢印でイメージすると，式の意味を理解しやすくなる．ベクトルの和については第 1.4.2 節で述べたが，和については 2 とおりの考え方があることをここで述べておく．

例えば

$$\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 \tag{1.29}$$

は $\boldsymbol{v}_1$ と $3\boldsymbol{v}_2$ の和であるが，これを図的にイメージすると図 1.17 のような 2 とおりが考えられる．

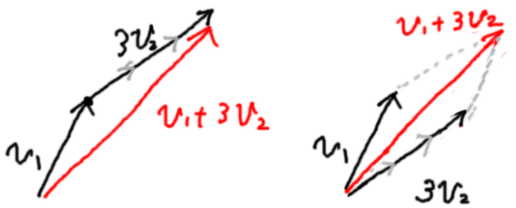


図 1.17　ベクトルの和のイメージ

図の左側は，$\boldsymbol{v}_1$ の終点に $3\boldsymbol{v}_2$ の始点をつないで連結する見方である．$\boldsymbol{v}_1$ の終点として到達した点をさらに $3\boldsymbol{v}_2$ で延長するような考え方である．この考え方は，例えば点の座標を求めたり，直線の方程式を導くときに有効となる．

一方，図の右側は，$\boldsymbol{v}_1$ と $3\boldsymbol{v}_2$ の始点を共通の 1 点にそろえている．そして，それらを合成してもう 1 本，方向が違うベクトル $\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2$ を作り出していると見ることができる．この考え方は，ベクトルの線形結合が作り得る空間がどうなるかを考察したり，連立一次方程式の解の存在性を考えるときに有効となる．

### 1.5.2　「ベクトル」と「位置ベクトル」の違い

ベクトルを有向線分と関連づける場合，「ベクトル」と「位置ベクトル」の 2 とおりの考え方がある．「ベクトル」は有向線分の方向と長さだけに注目したもので，始点と終点はどこでもよいという考えに基づいている．一方，「位置ベクトル」は点の位置を表すためのもので，空間内の基準となる点を有向線分の始点に，終点は注目している点の位置に一致させる．

例えば

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{1.30}$$

を（位置ベクトルではないほうの）「ベクトル」と見なして図で表すと，図 1.18 のようになる．

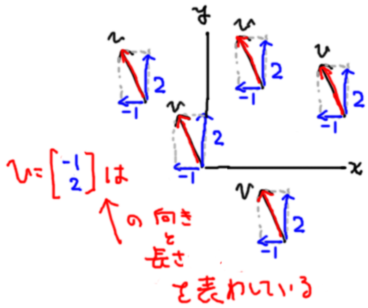


図 1.18　方向と長さを表す「ベクトル」

$\boldsymbol{v}$ を特徴づけるのは矢印の方向と長さだけなので，始点はどこでも構わない．図の中のすべての矢印が (1.30) 式の $\boldsymbol{v}$ を表している．$\boldsymbol{v}$ の成分である $-1$ と $2$ という値は，座標ではなく，矢印の向きと長さを決める値となっている（始点が原点に一致するように平行移動したベクトルの $x$ 座標と $y$ 座標が $-1$ と $2$ であるが，それらの値の組み合わせで向きと長さを表していると考える）．

一方，(1.30) 式を「位置ベクトル」と見なした場合，それを図で表すと図 1.19 のようになる．

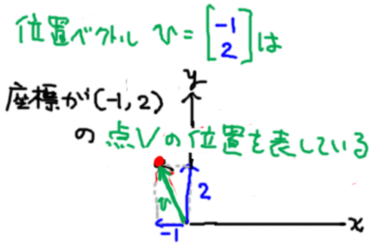


図 1.19　点の位置を表す「位置ベクトル」

図の点 $\boldsymbol{V}$ を表すために $\boldsymbol{v}$ を使っていると解釈する．ある 1 つの基準となる点（図 1.19 の場合は原点）をベクトルの始点として，注目する点（図 1.19 の場合は点 $\boldsymbol{V}$）をベクトルの終点とする．こうすると，点 $\boldsymbol{V}$ を 1 つ決めればベクトル $\boldsymbol{v}$ が 1 つ定まるし，逆にベクトル $\boldsymbol{v}$ を決めれば点 $\boldsymbol{V}$ の位置が定まる．すなわち，空間上の点 $\boldsymbol{V}$ とベクトル $\boldsymbol{v}$ が 1 対 1 に対応する．図 1.19 のように始点を座標系の原点にとれば，$\boldsymbol{v}$ の成分である $-1$ と $2$ という値は，点 $V$ の $x$ 座標と $y$ 座標を表すことになる．

「位置ベクトル」が用いられる場面は，直線の方程式や平面の方程式を導出するときや，座標軸を設定した空間における点の座標の計算に用いられる．一方，位置ベクトルでない「ベクトル」は，ある点と別の点との相対的な差を表すときや，ある点が別の点へ移るときの変化の量を表すときなどに用いられる．

ベクトルを見たとき，それが「位置ベクトル」なのか，位置ベクトルでない「ベクトル」なのかは紛らわしく，どちらにも解釈できる場合もある．しかし，「成分が座標であれば位置ベクトル」，「点の位置を表していれば位置ベクトル」，「傾きや 2 点間の差を表していれば（位置ベクトルでない）ベクトル」というような考え方で区別していくと，問題の解法が整理されて説明をつけやすくなる．つぎの節はこのことに関連した例題を扱っている．

### 1.5.3　直線の方程式をベクトルで求める問題

$xy$ 平面で点 $(0,3)$ を通り，傾きが 2 の直線は

$$y = 2x + 3 \tag{1.31}$$

であるが，これをベクトルを使って求めてみよう．この問題を解く過程では，「位置ベクトル」と「ベクトル」の両者が混在してくる．

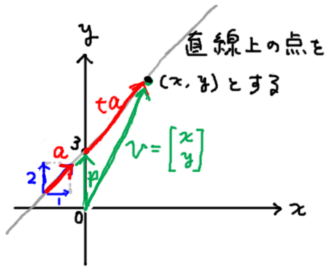


図 1.20　ベクトルを用いた直線の表現

図 1.20 のように，点 $(0, 3)$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}$, 直線の傾きを表すベクトルを $\boldsymbol{a}$, 直線上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする．$t$ を実数とすると直線上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{a} \tag{1.32}$$

と表される．右辺のベクトルの和は図 1.17 の左と同じ考え方に基づいており，$t\boldsymbol{a}$ というベクトルのスカラー倍は図 1.9 のようなベクトルの伸縮をさまざまな実数 $t$ で行っている．その結果，$\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{a}$ の終点は直線上のどこかの点となっている．ここで，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{p}$ は「位置ベクトル」，$\boldsymbol{a}$ は傾き（方向）を表す「ベクトル」である（図 1.21 参照）．

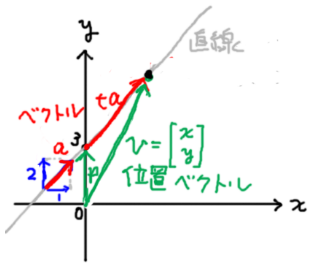


図 1.21　「位置ベクトル」と「ベクトル」

さて，各ベクトルの成分を考えていこう．位置ベクトルの成分は，それが表している点の座標であるので，

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

となる．直線の方程式を (1.31) 式のように $x$, $y$ で表わそうとしているので，直線上の点の座標を $(x, y)$ としている．

一方，傾きを表す「ベクトル」 $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{1.34}$$

と表される．これは座標ではなく，$x$ 成分が 1 で $y$ 成分が 2 となるような方向を表す値である．(1.33) 式と (1.34) 式を (1.32) 式に代入すると，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{1.35}$$

となる．この式も $t$ を媒介変数とした直線の方程式であるが，$t$ を消去して $x$ と $y$ だけの式にすると $y = 2x + 3$ というよく知られた直線の方程式が得られる（ここの計算は簡単なので各自でやってみてほしい）．

（注意）上の説明では $\boldsymbol{a}$ を「ベクトル」，$\boldsymbol{p}$ を「位置ベクトル」と考えた解法を示したが，逆に $\boldsymbol{a}$ を「位置ベクトル」，$\boldsymbol{p}$ を「ベクトル」と考える解法もある．その解法では，$t\boldsymbol{a}$ は座標が $(t, 2t)$ の点の位置ベクトル（$y = 2x$ 上の点の位置ベクトル），$\boldsymbol{p}$ は点を上へ（$y$ の正方向へ）3 だけ平行移動させるベクトルと考える．すると $t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{p}$ は，$y = 2x$ を上へ 3 シフトした $y = 2x + 3$ を表す．

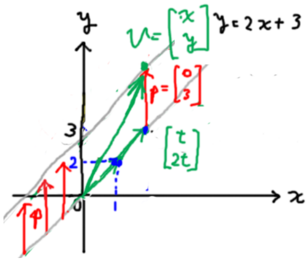


図 1.22　別の考え方

このようにベクトルを「位置ベクトル」と扱うか「ベクトル」と扱うかは，個々の解法の考え方による．ただし，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ が直線上の点を表す位置ベクトルであることは，どちらの解法でも共通している．

縦に長いベクトル $\boldsymbol{v}$ は，転置の記号を用いて

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^T \tag{1.36}$$

と書くことができる．以降，$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^T$ と書くことがあるが，それらの意味は同じである．

上記では 2 次元平面上の直線を求めたが，3 次元空間における直線の方程式も，ベクトルを用いれば同様な考え方で求めることができる．

> $xyz$ 空間において，点 $(1, 2, -3)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T$ に平行な直線の方程式を求めよ．

**（解答）**

直線上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ は，点 $(1, 2, -3)$ の位置ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}^T$ に，$\boldsymbol{a}$ の方向を向いたベクトル $t\boldsymbol{a}$（$t$ は実数）を加えて表される．すなわち，直線上の点の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{a} \tag{1.37}$$

と表される．成分を用いて書けば

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{1.38}$$

となる（これが $t$ を媒介変数とした直線の方程式である）．ここで $t$ を消去すると

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+3}{5} \tag{1.39}$$

という直線の方程式が得られる．

**（解答終）**

## 1.5.4　ベクトルの回転

**2 次元平面におけるベクトルの回転**

$xy$ 平面において，点 $\mathrm{A}(v_{ax}, v_{ay})$ を原点を中心に角度 $\theta$ だけ回転して点 $\mathrm{B}(v_{bx}, v_{by})$ に移すことを考える（図 1.23）．なお，回転角の正負については，反時計方向に回る角度 $\theta$ を正とする．

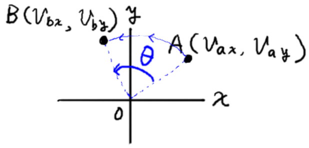


図 1.23　2 次元平面における点の回転

これらの座標の関係式は図 1.24 のようなベクトルと，「回転行列」を使って表すことができる．

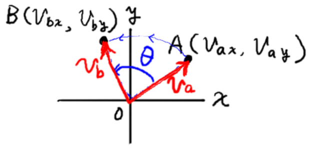


図 1.24　2 次元平面におけるベクトルの回転

$\boldsymbol{v}_a$ を点 $\mathrm{A}(v_{ax}, v_{ay})$ の位置ベクトル，$\boldsymbol{v}_b$ を点 $\mathrm{B}(v_{bx}, v_{by})$ の位置ベクトルとして，

$$\boldsymbol{v}_a = \begin{bmatrix} v_{ax} \\ v_{ay} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_b = \begin{bmatrix} v_{bx} \\ v_{by} \end{bmatrix} \tag{1.40}$$

とすると，これらの間の関係は，「回転行列」とよばれる

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{1.41}$$

を用いて

$$\begin{bmatrix} v_{bx} \\ v_{by} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ax} \\ v_{ay} \end{bmatrix} \tag{1.42}$$

と表される．

**3 次元空間におけるベクトルの回転**

$xyz$ 空間における点 $\mathrm{A}(v_{ax}, v_{ay}, v_{az})$ を，原点を中心とする回転によって点 $\mathrm{B}(v_{bx}, v_{by}, v_{bz})$ に移すことを考える．3 次元の場合，原点を通るどの軸を回転軸とするかを指定しなければならない．

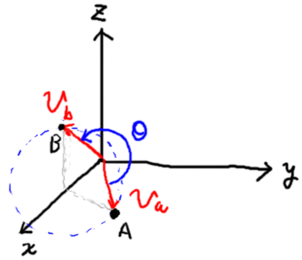


図 1.25　$x$ 軸まわりの回転

例えば，図 1.25 のような $x$ 軸を回転軸とする角度 $\theta$ の回転は，

$$\begin{bmatrix} v_{bx} \\ v_{by} \\ v_{bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ax} \\ v_{ay} \\ v_{az} \end{bmatrix} \tag{1.43}$$

$$= \begin{bmatrix} v_{ax} \\ \cos\theta v_{ay} - \sin\theta v_{az} \\ \sin\theta v_{ay} + \cos\theta v_{az} \end{bmatrix} \tag{1.44}$$

と表される．(1.44) 式で見られるように，$x$ 軸を回転軸とする場合，$x$ 座標は $v_{bx} = v_{ax}$ で変わらず，$y$ 座標と $z$ 座標が (1.42) 式と同様な形式で回転の影響を受ける．図 1.25 の $x$ 軸の正の方向に視点をおいて原点を見ると，図 1.26 のような $yz$ 平面が見える．この平面上での角度 $\theta$ の回転の影響が，(1.43) 式の行列で $\sin\theta$, $\cos\theta$ を含む要素として現れている．

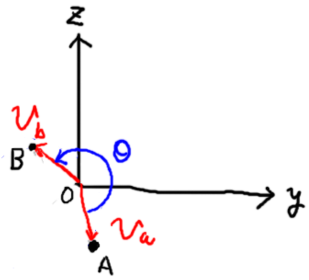


図 1.26　$x$ 軸から見た $yz$ 平面

(1.43) 式にある行列

$$\boldsymbol{M}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{1.45}$$

は「$x$ 軸まわりの回転行列」と呼ばれる．
　これと同様な考え方で「$y$ 軸まわりの回転行列」は

$$\boldsymbol{M}_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{1.46}$$

となる．「$z$ 軸まわりの回転行列」は

$$\boldsymbol{M}_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.47}$$

と表される．

(1.46) 式の $y$ 軸まわりの場合のみ，他の 2 つと比べて $\sin\theta$ の符合が異なることに注意しておこう．その理由は，$y$ 軸の正の方向に視点をおいて原点を見ると図 1.27 のような $xz$ 平面が見え，$x$ から $z$ への回転の向きが $\theta$ の正の向きと逆方向で，他の 2 つと異なるためである（例えば図 1.26 では $y$ から $z$ への回転の向きが $\theta$ の正の向きと同方向）．

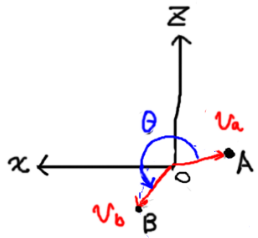


図 1.27　$y$ 軸から見た $xz$ 平面

### 1.5.5　座標変換の考え方

前節では，固定された 1 つの座標系（原点と座標軸の組み合わせ）の中である点を別の点へ移動させることを考えた．これと異なる考え方として，点は 1 つに固定しておきながら，複数の座標系を考えることがある．このとき，その点の座標がそれぞれの座標系でどんな値になるか，それらの相互関係はどんな式で表されるかが問題となる．

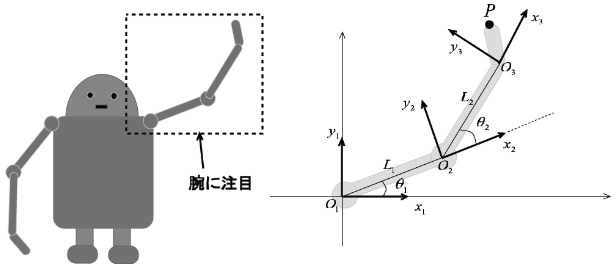


図 1.28　ロボットアームと 3 つの座標系

例えば，図 1.28 はロボットの腕を表しており， 3 つの座標系が設定されている．ここで手の先端 P の座標の値を求めたいとする．その座標を求めるとき，$x_3$, $y_3$ の座標軸を用いて求めた場合と，$x_1$, $y_1$ の座標軸で求めた場合では，座標の値が異なってくる．このように，同じ 1 つの点でも，座標系が異なれば座標の値もそれぞれ異なる．それらの座標の値の相互の関係式を求めるとき，座標系の「回転」と「平行移動」を考える方法があり，前節で述べた回転行列が活用される．ロボット工学における「座標変換」については機会があれば概要を説明したいと思う．

## 1.6　内積

ベクトルの世界に「内積」を導入することによって，2 つのベクトルのなす角度や，ある 1 つのベクトルの大きさの計算が可能になる．また，あるベクトルが別のベクトルの方向にどれぐらいの成分を持っているかを考えたり，直交するかどうかを考えることもできる．

ベクトル $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の内積を

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \tag{1.48}$$

書く．あるいは

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} \tag{1.49}$$

と書くこともある．

### 1.6.1　次元はいくつか，実数か複素数か

第 1.5.1 節から前節までは，2 次元あるいは 3 次元空間での実数を要素とするベクトルを扱ってきた．座標軸を設定した空間で「位置ベクトル」を扱うと自然とそうなってくる．

ここで内積を扱うのだが，ベクトルの次元をいくつとするか，数は実数なのか複素数なのかを明確にしておこう．この資料では基本的に，数としては実数を，次元としては 2 あるいは 3 次元のベクトルを扱うことにする．

ただし，つぎのことはコメントしておきたい．そもそも内積は 2 あるいは 3 次元に限らず $n$ 次元のベクトルでも定義できる量である．また，ベクトルのスカラー倍や要素として現れる数としては，実数に限らず，複素数に拡張しても内積を定義できる．もっと言うと，内積は数が並んだベクトルだけでなく，関数などに対しても定義できる．こういった，より一般的な内積は「線形ベクトル空間」を学ぶと出てくる．

$\boldsymbol{v}$ や $\boldsymbol{w}$ が実数を要素とするベクトルのとき，内積 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ は実数になる．内積は 2 つのベクトルから計算されるが，計算結果はベクトルではなく，ある 1 つの値になることに注意しよう．

なお，内積に用いるベクトルは「位置ベクトル」に限らず，一般的なベクトルと考えてよい．考察する問題によっては，方向を表すベクトルと位置ベクトルとの内積をとることもある．

### 1.6.2　内積の性質

内積に関してつぎの性質が成り立つ．

$$(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) \tag{1.50}$$

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}+\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) \tag{1.51}$$

$$(k\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, k\boldsymbol{w}) = k(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \tag{1.52}$$

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \tag{1.53}$$

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geq 0 \text{ であり，} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0 \text{ となるのは}\\ &\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ のときに限られる}\end{aligned} \tag{1.54}$$

次の節で内積の計算方法を示すが，その計算法のもとで上の性質が成り立つことを確かめることができる．

（補足１）線形ベクトル空間を扱う線形代数では，そもそも内積とは上の性質を満たすものとして定義されている．そこでは（ややこしい話になるが），「内積に対して上の性質が成り立っている」というよりも「上の性質を満たすもの内積という」というのが内積の定義になっている．

（補足２）複素数に拡張した内積では，(1.52) 式と (1.53) 式が少し違う式になり，一部に複素共役が現れる．

### 1.6.3　2 つのベクトルの「直交」の定義

2 つのベクトル $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の内積が零，すなわち，

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0 \tag{1.55}$$

が成り立つとき，「$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ は直交する」という．

（補足）　「直交」というと「2 つのなす角度が 90 度」というイメージがあるであろう．実際，2 次元あるいは 3 次元空間での 2 つのベクトルに対して，第 1.6.5 節の計算方法で内積が 0 になったならば，それら 2 つのベクトルのなす角度は 90 度になる．

### 1.6.4　1 つのベクトルの「大きさ」の定義

ある 1 つのベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})} \tag{1.56}$$

と定義し,「$\boldsymbol{v}$ の大きさ」とか「$\boldsymbol{v}$ の長さ」と呼ぶ．より専門的な用語として「$\boldsymbol{v}$ のノルム」という呼び方もある．

(1.56) 式を用いて (1.54) 式を書き直すと,

$$\begin{gathered}\|\boldsymbol{v}\| \geq 0 \text{ であり, } \|\boldsymbol{v}\| = 0 \text{ となるのは} \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ のときに限られる}\end{gathered} \tag{1.57}$$

となる．また, (1.56) 式と第 1.6.2 節の内積の性質を用いると,

$$\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\| \tag{1.58}$$

という「三角不等式を」導くことができる（この導出については機会があれば説明したい.）．(1.57) 式と (1.58) 式を見ると, $\|\boldsymbol{v}\|$ が「大きさ」や「長さ」を表していることがわかる．

### 1.6.5　内積の計算方法

2 次元ベクトルの場合, 2 つのベクトル

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \tag{1.59}$$

の内積をそれらの成分を用いて,

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = v_1 w_1 + v_2 w_2 \tag{1.60}$$

と計算する．こうしておくと，第 1.6.2 節での性質はすべて成り立つことが確認できる．

3 次元ベクトルの場合, 2 つのベクトル

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \tag{1.61}$$

の内積を，それらの成分を用いて,

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \tag{1.62}$$

と計算する．

2 次元でも 3 次元でも，転置と積を用いて

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{w} \tag{1.63}$$

という書き方で内積を表すことができる．

上記を一般化すると, $n$ 次元ベクトルの内積

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{1.64}$$

の内積は

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{w} \tag{1.65}$$

によって計算される．

このような成分を用いた計算方法に従って, (1.56) 式のように内積から定義された $\|\boldsymbol{v}\|$ を計算してみよう．例えば $\boldsymbol{v}$ が 2 次元で

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{1.66}$$

ならば,

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \tag{1.67}$$

となり，2 乗の和の平方根によってベクトルの大きさが計算される．

### 1.6.6　内積を使って計算できるもの

「内積が 0」という条件が「直交」という幾何学的な条件に結びついている．これによって，2 つのベクトルの方向が似ているのか全く違うのかを，内積という数で表現できるようになってくる．

例えば $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ はともに長さが 1 のベクトルとしよう．

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.68}$$

と固定しておき，これに対して，$\boldsymbol{v}_1$ の方向をいろいろな向きにとり，内積を求めてみると図 1.29 のようになる．

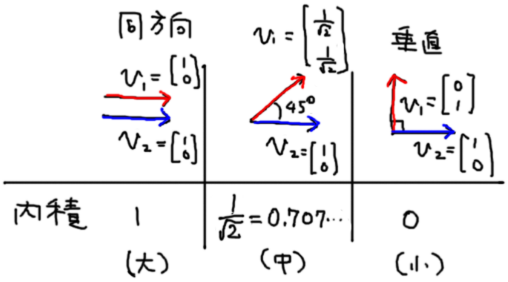


図 1.29　2 つの向きと内積の値

これからわかる傾向は，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の方向が似ていると内積が大きくなり，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が互いに別な方向を向くと内積（の絶対値）は小さくなり，垂直なときに 0 になる．内積はある意味，2 つのベクトルの類似度を表しているともいえる．これはやや漠然とした説明であるが，つぎに述べる「正射影」などでは内積を使った式で，あるベクトルのある方向の成分が計算される．

#### 正射影，ある方向の成分

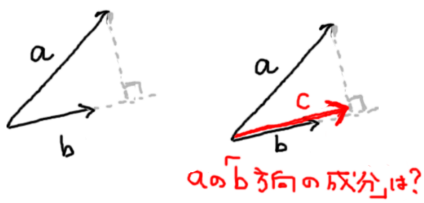


図 1.30　$\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{b}$ 方向の成分は？

図 1.30 の左のように，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がある．このとき，図の右のように「$\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{b}$ 方向成分」を表すベクトル $\boldsymbol{c}$ を，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を用いて表わすと

$$\boldsymbol{c} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b} \tag{1.69}$$

となる．この $\boldsymbol{c}$ を「$\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{b}$ への正射影」という．

$\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{b}$ と直交するとき，$\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{b}$ への正射影は $\boldsymbol{0}$ （零ベクトル）になる．

(1.69) 式はつぎのように導出される．図 1.31 のように，$\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{b}$ を伸縮させたものなので，ある実数 $k$ を用いて

$$\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{b} \tag{1.70}$$

と表される．この $k$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を用いて表すことを考える．図 1.31 で $k\boldsymbol{b}$ が満たす条件を考えると，$\boldsymbol{a} - k\boldsymbol{b}$ の方向が $\boldsymbol{b}$ の方向と垂直になることである．それを内積を用いた式で表現すると

$$(\boldsymbol{a} - k\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 0 \tag{1.71}$$

であり，これを満たす $k$ を求めればよい．上式を展開すると，

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - k(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 0 \tag{1.72}$$

となり，$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$ を $\|\boldsymbol{b}\|^2$ に置き換えながら $k$ を求めると

$$k = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{b}\|^2} \tag{1.73}$$

が得られる．これを (1.70) 式に代入すると，

$$\boldsymbol{c} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b} \tag{1.74}$$

となる．

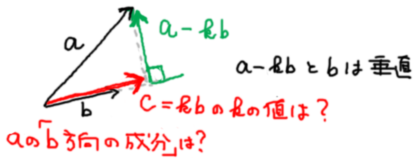


図 1.31　$\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{b}$ 方向の成分は？

## 2 つのベクトルのなす角


図 1.32　ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 $\theta$

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 $\theta$ の余弦は

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} \tag{1.75}$$

で求められる．さらに，$0 \leq \theta \leq \pi$ とすると，$\cos\theta$ から $\theta$ の値がただ 1 つに定まる．

## ある方向の単位ベクトル

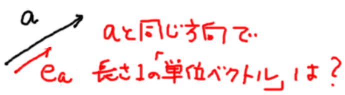


図 1.33　$\boldsymbol{a}$ と同方向の単位ベクトル

$\boldsymbol{a}$ が与えられたとき，それと同じ方向で大きさが 1 のベクトル（「単位ベクトル」という）$\boldsymbol{e}_a$ は，

$$\boldsymbol{e}_a = \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} \tag{1.76}$$

で求められる．

例えば，元の $\boldsymbol{a}$ の大きさが 2 であったなら，$\boldsymbol{a}$ を 2 で割ったものの大きさは 1 になる．この考え方に基づき，$\boldsymbol{a}/\|\boldsymbol{a}\|$ で大きさを 1 にしている．

### あるベクトルに垂直な平面の方程式

$xyz$ 空間で，点 $\mathrm{P} = (p_x, p_y, p_z)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{a} = [a_x \ \ a_y \ \ a_z]^T$ に垂直な平面の方程式を求めてみよう．

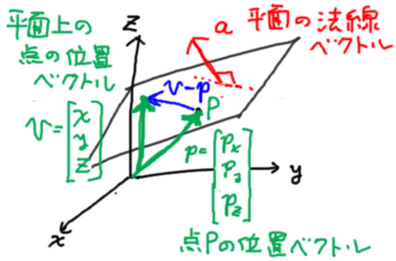


図 1.34　点 P を通り $\boldsymbol{a}$ に垂直な平面

図 1.34 のように，点 P の位置ベクトルを

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \tag{1.77}$$

とし，平面上の任意の点 $(x, y, z)$ の位置ベクトルを

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{1.78}$$

とする（$xyz$ 空間における平面の方程式を $x$, $y$, $z$ を用いて表すことが目的であるため，平面上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分には点の座標を表す $x$, $y$, $z$ という文字を使っている．この後の式では，$\boldsymbol{v}$ が満たすべき条件を書き表す．そこにベクトルの成分 $x$, $y$, $z$ を代入して整理することにより平面の方程式が導出される）．平面がベクトル $\boldsymbol{a}$ に垂直であることは，図 1.34 におけるベクトル $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{a}$ が垂直ということであり，この条件を内積を用いた式で表すと

$$(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}) = 0 \tag{1.79}$$

となる．この式を (1.63) 式のように転置とベクトルの積で表し，かつ各ベクトルの成分を代入すると，

$$\begin{bmatrix} x - p_x \\ y - p_y \\ z - p_z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = 0 \tag{1.80}$$

となる．これを計算して整理すると，平面の方程式，

$$a_x x + a_y y + a_z z + d = 0 \tag{1.81}$$

が得られる．ただし，

$$d = -p_x a_x - p_y a_y - p_z a_z \tag{1.82}$$

である．

(1.81) 式は $xyz$ 空間における「平面の方程式」を表す．ベクトル $\boldsymbol{a}$ は平面の「法線ベクトル」と呼ばれる．(1.81) 式の平面の方程式での特徴は，法線ベクトル $\boldsymbol{a}$ の成分 $a_x$, $a_y$, $a_z$ がそれぞれ $x$, $y$, $z$ の係数になっているところである．

# 1.7　外積

## 1.7.1　外積の定義

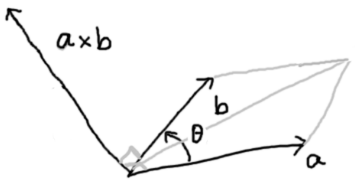


図 1.35　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

図 1.35 のように，3 次元空間に 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ があり，それらのなす角が $\theta$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ であるとする．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直で，大きさが $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のつくる平行四辺形の面積に等しいベクトルを，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積**といい，

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{1.83}$$

と書く．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直な向きは 2 とおりあるが，外積の向きは $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へ右ねじを回転させたときにそれが進む方向（あるいは，右手の人差し指から小指を $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ の向きに合わせたとき，親指が向く方向）とする．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が同一直線上にある場合は，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$（零ベクトル）とする．内積が 1 つの数であるのに対し，外積はベクトルであることに注意しよう．

## 1.7.2　外積の性質

外積に関するいくつかの性質をまとめておく．

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) \tag{1.84}$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \tag{1.85}$$

$$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta \tag{1.86}$$

$$(k\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{1.87}$$

これらの式が成り立つことは，上で述べた外積の定義からわかるであろう．

2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行なとき，$\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ と表わされる．このことと (1.85) 式，(1.87) 式より，「$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行のとき，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ である」といえる．

3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ に対して，内積と外積とが混合したつぎの関係式が成り立つ．

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \tag{1.88}$$

この式が成り立つことは，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の始点をそろえて平行 6 面体をつくり，その体積を考えることによって証明される．

さらにつぎの分配法則が成り立つ．

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \tag{1.89}$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \tag{1.90}$$

証明は内積の性質と外積の性質を組み合わせてなされる．

（注意）　結合法則は成り立たず，一般には

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} \tag{1.91}$$

である．

### 1.7.3　外積の成分の計算

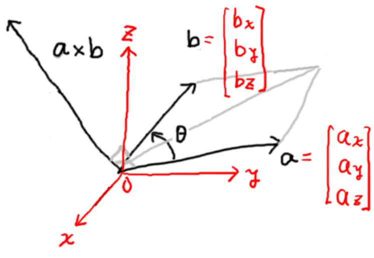


図 1.36　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

図 1.36 のように $xyz$ の座標系を設定し，

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \tag{1.92}$$

と成分表示したとする．このとき，外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} \tag{1.93}$$

と表わされる．
（注意）座標系の設定の仕方（座標軸の正の向きをどちらにとるか）によって (1.93) 式の成分が変わってくる．(1.93) 式が成り立つのは，図 1.36 のように座標系を設定した場合であることに注意しておく．

外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直であることから，平面の法線ベクトルを求めるときに利用されることがある．

## 1.8　一次独立と一次従属

### 1.8.1　行列とベクトル

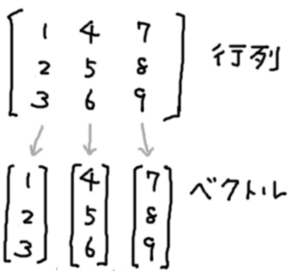


図 1.37　行列の性質とベクトルの性質

図 1.37 のように，行列を複数のベクトルに分解することにより，行列が持つ性質を複数のベクトルで調べることができる．また，複数のベクトルの線形結合を考察することによって，連立一次方程式の解の性質を論じることもできるようになる．

この章では，複数のベクトルの間に存在する「独立」と「従属」の概念と定義について解説する．
なお，この章でも例としてあげるのは実数の 2 次元ベクトルや 3 次元ベクトルであるが，$n$ 次元や複素数のベクトルでもこの章で述べることは成立する．

### 1.8.2　独立ではないベクトル

例えば，

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

の 3 本のベクトルについて考えてみよう．これらの間には

$$\boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 \tag{1.2}$$

という関係が成り立っていて，$\boldsymbol{v}_3$ は他の 2 本（$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$）の線形結合で表される．$\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{v}_2 \neq \boldsymbol{v}_3$ なのだが，その中の 1 本のベクトルが他の 2 本の線形結合で表せるということから，3 本が「独立ではない」というのは感覚的にわかるであろう．

### 1.8.3　独立なベクトル

別の例として

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

について考えてみよう．この場合には，

$$\boldsymbol{v}_1 = c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 \tag{1.4}$$

のように $\boldsymbol{v}_1$ を $\boldsymbol{v}_2$ と $\boldsymbol{v}_3$ の線形結合で表すことができない．また，

$$\boldsymbol{v}_2 = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_3\boldsymbol{v}_3 \tag{1.5}$$

とも

$$\boldsymbol{v}_3 = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 \tag{1.6}$$

ともなり得ない．「(1.4) 式も (1.5) 式も (1.6) 式も成り立たない」，すなわち，「どのベクトルをとっても，その他のベクトルの線形結合で表すことができない」ということを，「$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が独立である」ということにする．
(1.4) 式，(1.5) 式，(1.6) 式のように式を 3 つも用いなくても，もっと簡潔にベクトルの独立性をつぎのように記述することができる．
「ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が独立であるとは，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \tag{1.7}$$

を成り立たせるような $c_1, c_2, c_3$ は，$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ に限られることである」
$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ でなく，例えば $c_1 \neq 0$ で (1.7) 式が成り立つと独立でなくなる．なぜならこの場合

$$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\boldsymbol{v}_2 - \frac{c_3}{c_1}\boldsymbol{v}_3 \tag{1.8}$$

と変形できて，$\boldsymbol{v}_1$ が $\boldsymbol{v}_2$ と $\boldsymbol{v}_3$ の線形結合で表されるからである．「$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ に限られる」は (1.8) 式のような線形結合の表現があり得ないということを意味している．
ここまでは 3 本のベクトルで話を進めてきたが，独立に関する議論はベクトルが何本であっても可能である．つぎの文は，$m$ 本のベクトルに対して一次独立とはどういうことかを定義している．

ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ が**一次独立**（あるいは**線形独立**）であるとは，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0} \tag{1.9}$$

を成り立たせる $c_1, \cdots, c_m$ は，$c_1 = \cdots = c_m = 0$ に限られることである．

「一次独立でない」ことを「一次従属」（あるいは「線形従属」）という．

ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ が**一次従属**（あるいは**線形従属**）であるとは，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0} \tag{1.10}$$

を成り立たせる $c_1, c_2, \cdots, c_m$ が，$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ 以外にも存在することである．

（注意）$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ が一次独立でも一次従属でも $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ であれば，$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0}$ は成り立つ．独立か従属かの違いは，$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ に限られるのか，それ以外にもあり得るのかというところである．

### 1.8.4　いくつかの例

ここでいくつかの例を見て理解を定着させるとしよう．

（例 1）

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

は一次従属である．$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ と表されるからである．あるいは (1.10) 式を用いていえば，$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ が $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -1$ で成り立つからである．

（例 2）

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

は一次独立である．

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

が成り立つのは，$c_1, c_2, c_3$ がすべて 0 のときに限られる．もし，1 つでも 0 でないものがあれば，左辺を計算した結果が零ベクトルにならず，(1.13) 式が成り立たない．

（例 3）

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

は一次従属である．$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ が $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 \neq 0$ で成り立つからである．
（注意）この例のように，ベクトルの組の中に 1 **つでも零ベクトルが含まれている場合には一次従属になる．**

（例 4）

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

は一次従属である．$\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{v}_1$ と表されるからである．あるいは (1.10) 式を用いていえば，$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$ が $c_1 = 2$, $c_2 = -1$ で成り立つからである．

（例 5）

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

は一次独立である．これは上の（例 4）との比較からわかる．

（例 6）

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

は一次独立である．

（例 7）

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

は一次従属である．

(1.17) 式や (1.18) 式のように，ベクトルが 1 本しかなくても，一次独立か一次従属を考えることができる．**1 本の場合，零ベクトルでないなら一次独立，零ベクトルなら一次従属である．**その理由はつぎのように説明できる．

$$c_1\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0} \tag{1.19}$$

を満たす $c_1$ が $c_1 = 0$ しかないか，それ以外にあるかを考えればよい．もし $\boldsymbol{v}_1 \neq \mathbf{0}$ ならば，$c_1\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$ を成り立たせる $c_1$ は $c_1 = 0$ に限られるので，$\boldsymbol{v}_1$ は一次独立である．もし $\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$ ならば，$c_1 \neq 0$ でも (1.19) 式が成り立つので，$\boldsymbol{v}_1$ は一次従属となる．

### 1.8.5　独立か従属かの判別方法

ここまでの例では，ひと目見て独立か従属かが判別できたが，一般にはそう簡単ではない．例えばつぎの 3 本のベクトルが一次独立か従属かを考えてみよう．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

この中のどれか 1 本が他の 2 本の線形結合で表される可能性を暗算で考えてもなかなか答えが見えてこない．このような場合，(1.9) 式または (1.10) 式に立ち返り，

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{1.21}$$

を満たす $c_1, c_2, c_3$ の値を調べるのが一つの方法である．この式は

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

と変形できるので，$c_1, c_2, c_3$ の値を調べることは，連立線形方程式の解を調べることを意味している．そして解を求めたとき，$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ しかないならば $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は一次独立，$c_1, c_2, c_3$ のうち 1 つでも 0 でない解があれば一次従属である．

連立一次方程式を解く方法には,「行基本変形」による方法,「行列式」を用いる方法などがある．これらについては別の機会に説明する．

### 1.8.6　2 次元での幾何学的イメージ

### 1.8.7　2 本の 2 次元ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

の場合，これら 2 本は一次従属である．なぜなら

$$\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 \tag{1.24}$$

であるからである．すなわち，2 本のうちの 1 本が他のスカラー倍で表わされている．これら 2 つのベクトルの始点を合わせて図で表わすと図 1.38 のように，同一直線上にある（ベクトルの独立や従属を考える場合，このように始点を合わせた図を用いることが多い）．

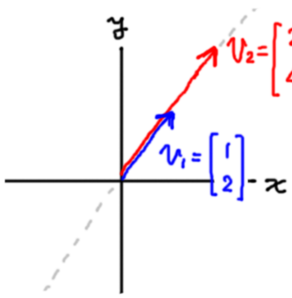


図 1.38　2 本の従属な 2 次元ベクトル

一方，一次独立な場合を考えてみよう．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

の 2 本は一次独立であり，図 1.39 のように同一直線上ではなく，それぞれ別方向を向く．

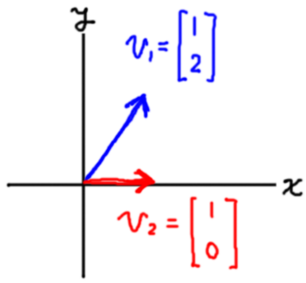


図 1.39　2 本の独立な 2 次元ベクトル

まとめると，実数の 2 次元ベクトルの場合，2 本のベクトルが一次独立か従属かは，同一直線上に重なるかそうでないかの違いとして現れる．

### 1.8.8　3 本以上の 2 次元ベクトル

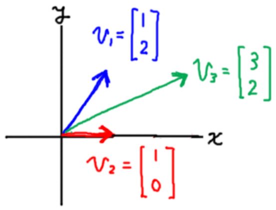


図 1.40　3 本の 2 次元ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

のように 3 本の場合は，どう考えればよいだろうか．図 1.40 のように，「3 本のベクトルはそれぞれ違う方向を向いているので独立 (?)} と思ってしまうかもしれないが，それは誤りである．

正解は「これら 3 本は一次従属である」である．理由は

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 \tag{1.27}$$

であり，$\boldsymbol{v}_3$ は他の 2 本の線形結合で表わされるからである（図 1.41 参照）．

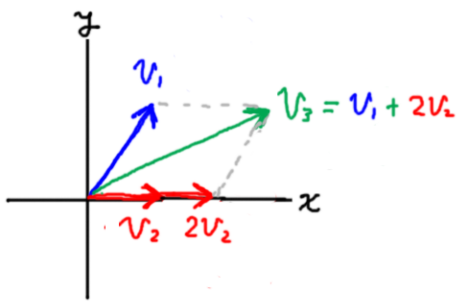


図 1.41　2 次元ベクトルが 3 本の場合

上の例に限らず一般に，**2 次元ベクトルの世界では，独立な 2 本の線形結合によって，任意のベクトルを表現できる．**追加の 3 本目がどの方向を向いていても，元からある独立な 2 本の線形結

合によって 3 本目を表わすことが可能である．したがって，**2 次元ベクトルが 3 本集まると，それら 3 本は必ず一次従属になる**

(補足) 上で「2 次元ベクトルの世界では，独立な 2 本の線形結合によって，任意のベクトルを表現できる」と述べた．例えば，

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

という 2 本の独立なベクトルを用いれば，任意のベクトル $\boldsymbol{v} = [v_1 \ \ v_2]^T$ は

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.29}$$

として，$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2$ という線形結合で表わされる．上の例では $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ が互いに直交する長さ 1 のベクトルであったが，そうでなくても独立で異なる方向を向いていれば，スカラー倍で長さを調節しながら和をとる線形結合によって任意のベクトルを表現できる．

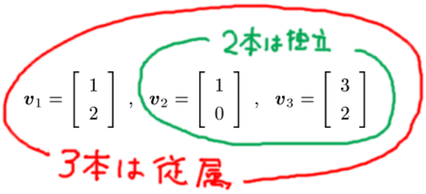


図 1.42　何本で考えるかが重要

(注意 1) 図 1.42 のように，$\boldsymbol{v}_2$ と $\boldsymbol{v}_3$ だけを取り出して 2 本のベクトルで考えれば「$\boldsymbol{v}_2$ と $\boldsymbol{v}_3$ の 2 本のベクトルは一次独立である」となる．しかし，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の 3 本について考えると一次従属である．このように一次独立かどうかを考えるときは，何本のベクトルを対象に議論しているのかをきちんと考える必要がある．

繰り返しになるが，(1.26) 式から「2 本と取り出すとそれらが一次独立となる」が，「3 本にするとそれらは一次従属」となる．この状況を「**(1.26) 式の中には，最大 2 本の独立なベクトルが存在する**」という言い方をする．

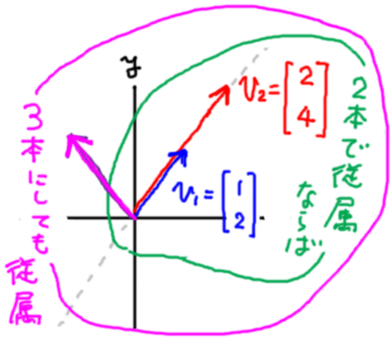


図 1.43　2 本で従属ならば 3 本でも従属

図 1.43 のように，元の 2 本が一次従属の場合には，どんな 3 本目を追加しても．やはり 3 本のベクトルは一次従属である．元の 2 本のうち 1 本はもう 1 本のスカラー倍になっているからであり，その事実は 3 本目を追加しても変わらない．一般に，**元から一次従属なベクトルの集まりに，ベクトルを追加して本数を増やしても，やはり一次従属である**．

### 2 次元ベクトルが一次従属になるケース

以上の考察から，2 次元ベクトルが $m$ 本ある場合，つぎのいずれかに（どれか 1 つでも）該当すれば，それら $m$ 本は一次従属となる．

- $m$ 本の中の 2 本（あるいはそれ以上）が，始点をそろえると同一直線上にある．
- $m$ が 3 以上である（2 次元ベクトルが 3 本以上ある）．
- $m$ 本の中に零ベクトルが含まれている．

零ベクトルが含まれていると一次従属となる理由は，(1.14) 式の例からわかる．

### 1.8.9　3 次元での幾何学的イメージ

**3 次元ベクトルが一次従属になるケース**

前節で述べたことを 3 次元に拡張すると，つぎのようになる．3 次元ベクトルが $m$ 本ある場合，つぎのいずれかに（どれか 1 つでも）該当すれば，それら $m$ 本は一次従属となる．

- $m$ 本の中 2 本（あるいはそれ以上）が，始点をそろえると同一直線上にある．
- $m$ 本の中の 3 本（あるいはそれ以上）が，始点をそろえると同一平面上にある．
- $m$ が 4 以上である．
- $m$ 本の中に零ベクトルが含まれている．

上記のそれぞれについて，下記でもう少し説明していく．

**同一直線上にあって従属に場合**

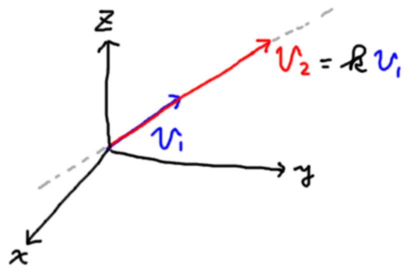


図 1.44　同一直線上にある 3 次元ベクトル

3 次元ベクトルでも 2 次元と同様に，ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が同一直線上にあれば（図 1.44 参照），スカラー $k$ を用いて

$$\boldsymbol{v}_1 = k\boldsymbol{v}_2 \tag{1.30}$$

で表わされ，**同一直線上にある 2 本のベクトルは一次従属となる**．また，これらのベクトルが $m$ 本の中に含まれていれば，$m$ 本のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ は一次従属である．なぜなら

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0} \tag{1.31}$$

が $c_1 = 1 \neq 0,\ c_2 = -k \neq 0,\ c_3 = \cdots = c_m = 0$ で成り立つからである．

### 同一平面上にあって従属になる場合

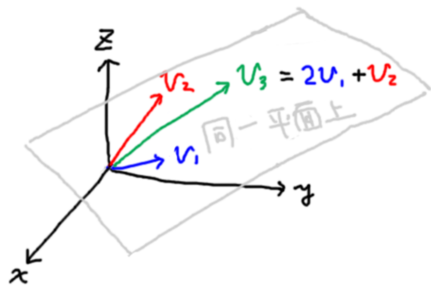


図 1.45　同一平面上にある 3 次元ベクトル

3 次元ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が同一平面上にある場合（図 1.45 参照），

$$\boldsymbol{v}_3 = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 \tag{1.32}$$

のように，1 本が他の 2 本の線形結合で表わされる．したがって，**同一平面上にある 3 本のベクトルは一次従属である**．また，これら 3 本を含む $m$ 本も一次従属となる．

### 3 次元ベクトルが 4 本以上あると従属

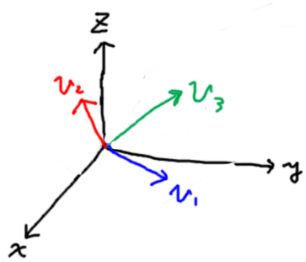


図 1.46　3 本の独立な 3 次元ベクトル

3 次元ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の 3 本が独立であるとしよう（図 1.46）．3 次元ベクトルの世界では，独立な 3 本の線形結合によって，任意のベクトル（4 本目）を表現できる（図 1.47）．

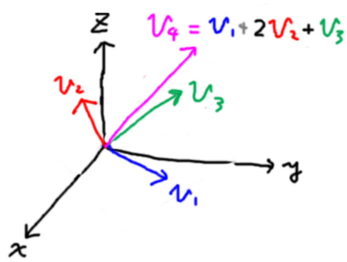


図 1.47　4 本の 3 次元ベクトルは従属

したがって，独立な 3 本に対して，もう 1 本 $\boldsymbol{v}_4$ を追加して 4 本にすると，

$$\boldsymbol{v}_4 = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 \tag{1.33}$$

という線形結合による表現が生じてくるので，それら 4 本は一次従属となる．一般に，**3 次元ベクトルが 4 本以上あると，それらは一次従属になる．**

(補足) 上で「3 次元ベクトルの世界では，独立な 3 本の線形結合によって，任意のベクトルを表現できる」と述べた．例えば，

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.34}$$

という 3 本の独立なベクトルを用いれば，任意のベクトル $\boldsymbol{v} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T$ は

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.35}$$

として，$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3$ という線形結合で表わされる．上の例では $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が互いに直交する長さ 1 のベクトルであったが，そうでなくても 3 本が独立であれば，スカラー倍で長さを調節しながら和をとる線形結合によって任意のベクトルを表現できる．

例えば，

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{1.36}$$

という 4 本のベクトルがあるとする．これらから $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の 3 本を取り出せば，「3 本のベクトルとしては一次独立」であるが，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ の「4 本のベクトルとしては一次従属」である．この状況を「**(1.36) 式の中には，最大で 3 本の独立なベクトルが含まれている**」という（図 1.48）．

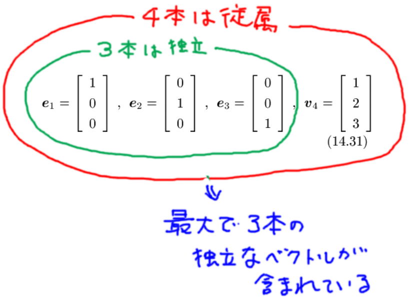


図 1.48　「最大で 3 本の独立なベクトルを含む」ということ

# 1.9　行列の階数（ランク）

## 1.9.1　階数（ランク）とは

行列 $\boldsymbol{M}$ に対して，その「階数（ランク）」という値が存在する．階数（ランク）とは何か，その定義にはさまざまな方法があり，

- 行列に含まれる一次独立なベクトルの最大本数
- 行基本変形による簡約化で現れる主成分の個数
- 0 にならない小行列式の最大次数

などによって定義される（上にはまだ学んでいない用語がある．それらについては別の機会に解説したい）．どの定義を用いても階数（ランク）の値は同じである．

この授業では，「**行列の階数（ランク）**」とは「**行列に含まれる一次独立なベクトルの最大本数**」と定義して（図 1.49），その考え方を説明する．

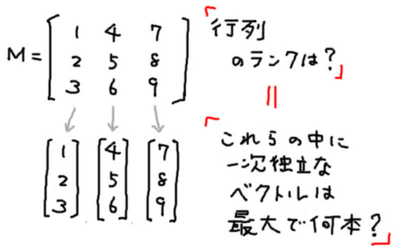


図 1.49　行列のランクとベクトルの関係

## 1.9.2　階数（ランク）の値

図 1.49 でおおよその説明はできているが，いろいろな具体例によって理解を深めてもらおう．

**（例１）**まず，図 1.48 を復習しておこう．そして，

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{1.37}$$

のランクを考えてみよう．この行列 $\boldsymbol{M}$ を 4 本のベクトルに分解して，図 1.50 のように考えていく．

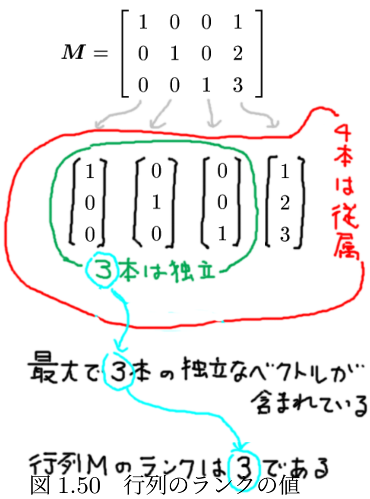


図 1.50　行列のランクの値

この例の場合，まずは 4 本で考えてみて一次独立ではなく従属であることから，「とりあえずランクは 4 ではない」ということになる．つぎに 3 本で考えてみる．3 本選び出して一次独立になるものがあることから，行列 $\boldsymbol{M}$ には最大で 3 本の一次独立なベクトルが含まれている．したがって，「ランクは 3 である」という結論に至る．

図 1.50 では左の 3 本のベクトルを選び出しているが，別にどこから選び出してもよい．とにかくどれでもよいから 3 本選び出して，それらが一次独立かどうかを調べていけばよい．

**（例２）**

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{1.38}$$

のランクは 1 である．その理由は図 1.51 に示す．

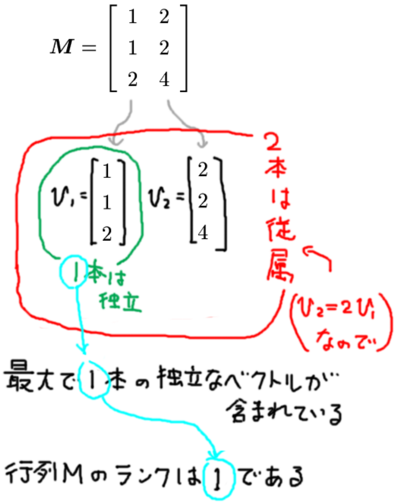


図 1.51　行列のランクの値

この例の場合，まずは 2 本で考えてみて，$\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{v}_1$ で一次従属であることから，「とりあえずランクは 2 ではない」ということになる．つぎに 1 本で考えてみる．ここで (1.17) 式と (1.18) 式の例を思い出そう．1 本の場合には「零ベクトルでなければ一次独立」であるので $\boldsymbol{v}_1(\neq \boldsymbol{0})$ のみで一次独立となる．行列 $\boldsymbol{M}$ には最大で 1 本の一次独立なベクトルが含まれているので，「ランクは 1 である」という結論になる．

**（例３）**

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \tag{1.39}$$

のランクは 2 である．理由は，

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{1.40}$$

の 2 本が一次独立だからである．

**（例４）**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{1.41}$$

のランクは 3 である．理由は，(1.12) 式で見たように，

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{1.42}$$

の 3 本が一次独立であり，(1.41) 式の行列の中には，最大で 3 本の独立なベクトルが含まれているからである．

**（例５）**

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \tag{1.43}$$

のランクは 2 である．理由は，まず (1.11) 式で見たように，

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{1.44}$$

で $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ が成り立ち（始点をそろえたとき同一平面上にあり），3 本では一次従属である．したがって，ランクは 3 ではない．つぎに

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{1.45}$$

の 2 本で考えると，これらは一次独立である．よって，(1.43) 式の行列には，最大で 2 本の一次独立なベクトルが含まれているので，ランクは 2 になる．

**（例６）**

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \tag{1.46}$$

のランクは 1 である．理由は

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{1.47}$$

の 3 本は，

$$6\boldsymbol{v}_1 = 3\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{v}_3 \tag{1.48}$$

を満たし，始点をそろえたとき同一直線上にあり一次従属となっている．また，3 本中の 2 本を選んでもやはり同一直線上にあり，2 本で考えても一次従属である．したがってランクは 3 でも 2 でもない．1 本だけで考えた場合，零ベクトルでないものが含まれているので，それで一次独立となる．よって，(1.46) 式の行列の中には最大で 1 本の一次独立なベクトルが含まれているので，行列のランクは 1 である．

**（例７）**

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.49}$$

のランクは 0 である．理由は 1 本も一次独立なベクトルがないからである．

（注意）(例４)〜(例７) からわかるように，3 行 3 列の行列のランクは 3 か 2 か 1 か 0 である．行列を 3 本のベクトルに分解したとき，それら 3 本で一次独立なときにランクは 3 になり，3 本が一次従属なときにはランクは 3 より小さい値になる．

その他さまざまな例を以下に示しておく．

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ のランクは 1 である．

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ のランクは 2 である．

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ のランクは 0 である．

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ のランクは 1 である．

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ のランクは 1 である．

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ のランクは 3 である．

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ のランクは 1 である．

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ のランクは 2 である．

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ のランクは 3 である．

（注意）3 行 4 列の行列のランクは 3 以下であり 4 になることはない．第 1.8.9 節で述べたように，3 次元ベクトルが 4 本集まると必ず一次従属になるからである．


図 1.52　ランクを考えるときの行列の分解

（注意）行列のランクを考えるときには，図 1.52 のように，縦長の列ベクトルに分解してもよいし，横長の行ベクトルに分解してもよい．どちらで考えても結果（ランクの値）は同じになる．この授業では，どちらかといえば縦長の列ベクトル（図中の左側）に分解する方法をとることにする．

## 1.10　連立一次方程式の解

### 1.10.1　$\boldsymbol{Ax}$ がつくる空間

例えば，

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 11 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 12 \end{cases} \tag{1.50}$$

という連立一次方程式は，

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} \tag{1.51}$$

というように，行列とベクトルを用いて書くことができる．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} \tag{1.52}$$

という記号を用いれば，

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{1.53}$$

が連立一次方程式を表わすことになる．行列 $\boldsymbol{A}$ をベクトルに分解する考え方を用いると，上の連立一次方程式は

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} \tag{1.54}$$

とも書くことができる．$\boldsymbol{Ax}$ は上式の左辺のような線形結合として表されることに注意しておこう．

この書き方に基づいて，連立一次方程式の問題を考えてみよう．「連立一次方程式の解は存在するのか？」という問題は，「つぎの

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \tag{1.55}$$

という線形結合の係数 $x_1$, $x_2$, $x_3$ をうまく調整して，

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} \tag{1.56}$$

というベクトルを作り出すことができるか？」という問題になる（図 1.53）.

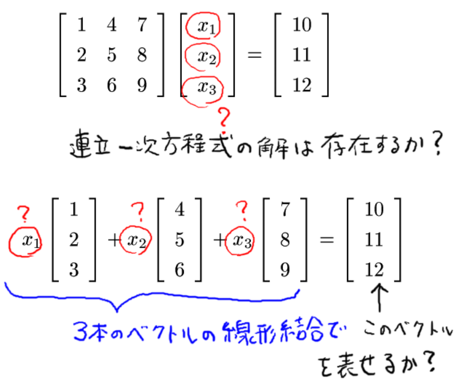


図 1.53 線形結合による表現の問題

このように，連立一次方程式の解の存在性を考察するときには，(1.55) 式のようなベクトルの線形結合が作り出す空間をイメージするのが有効となる．(1.55) 式の線形結合は元々 $\boldsymbol{Ax}$ であるので，$\boldsymbol{Ax}$ のつくる空間が問題となる．後に説明するが，それがどのような空間になるかは，行列 $\boldsymbol{A}$ のランクと関係がある．

### 1.10.2 $\boldsymbol{A}$ が 2 行 2 列でランクが 2 の場合

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.57}$$

とする．この行列のランクは 2 である．その理由は，

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.58}$$

の 2 本がそれぞれ異なる方向を向いており（図 1.54 参照），一次独立であるからである．

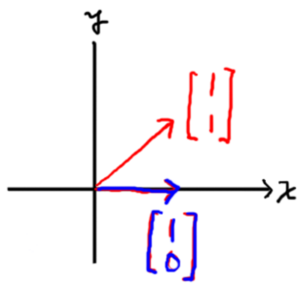


図 1.54 行列 $\boldsymbol{A}$ に含まれているベクトル

さて，連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{1.59}$$

の解が存在するかを考えてみよう．この問題を

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{1.60}$$

が成り立つかどうか，すなわち，左辺の線形結合で右辺のベクトルを表せるかどうかに置き換えて考えてみる．(1.60) 式の左辺にある 2 本のベクトル

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.61}$$

は一次独立である．2 本の独立な 2 次元ベクトルがあれば，それらの線形結合によって，どんな 2 次元ベクトルでも表すことができるので，(1.60) 式を満たす $x_1, x_2$ が存在する．実際に計算すると $x_1 = -2, x_2 = 5$ という一組が求められる．

この解を係数に用いた線形結合は

$$-2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{1.62}$$

となり，これが解になっている状況は図 1.55 で表わされる．

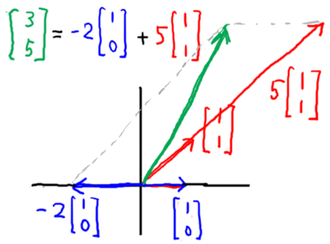


図 1.55　線形結合による解の表現

一般にはつぎのことが言える．

> $\boldsymbol{A}$ が 2 行 2 列でランクが 2 の場合，$\boldsymbol{b}$ がどんな 2 次元ベクトルでも連立一次方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の解は存在する．その解は一意（何通りもあるのではなく，ただ一通りだけ）である．

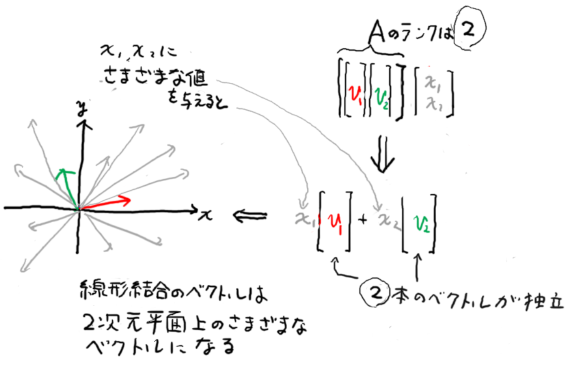


図 1.56　$\boldsymbol{A}$ のランクが 2 のとき $\boldsymbol{Ax}$ がつくる空間

**2 行 2 列の行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが 2 のとき，$\boldsymbol{x}$ がさまざまな値をとることによって $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ がつくる空間は 2 次元平面全体となる**（図 1.56）．

$\boldsymbol{b}$ がどんなベクトルであっても，それはやはり 2 次元平面全体のどこかに含まれるので，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{b}$ に一致するような $x_1, x_2$ が存在し，それが解となる．

### 1.10.3　$\boldsymbol{A}$ が 2 行 2 列でランクが 1 の場合

**（例１）**

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \tag{1.63}$$

の場合，ランクは 1 である．その理由は，

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} \tag{1.64}$$

の 2 本は始点をそろえると同一直線上にあり（図 1.57 参照），これら 2 本は一次従属であることがわかる．したがってランクは 2 ではない．そして，零ベクトルでないベクトルがあるのでランクは 1 である．

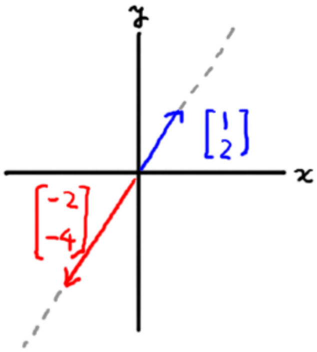


図 1.57　$\boldsymbol{A}$ に含まれるベクトル

さて，連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{1.65}$$

の解が存在するかを考えてみよう．この問題を

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{1.66}$$

が成り立つかどうか，すなわち，左辺の線形結合で右辺のベクトルを表せるかどうかに置き換えて考えてみる．(1.66) 式の左辺にある 2 本のベクトル

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} \tag{1.67}$$

は図 1.57 で見たように同一直線上にあるので，これらの線形結合である (1.66) 式の左辺は，それはやはり同じ直線上のベクトルとなる．一方，(1.66) 式の右辺にあるベクトル $\boldsymbol{b}$ はその直線とは違う方向を向いている（図 1.58 参照）．

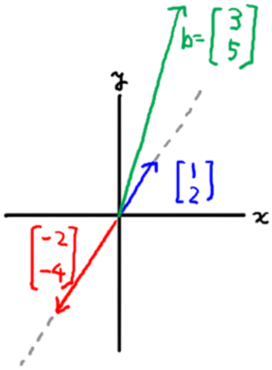


図 1.58　$\boldsymbol{A}$ に含まれるベクトルと $\boldsymbol{b}$

したがって，$x_1$, $x_2$ にどんな値を設定しても (1.66) 式は成立しない．よって，(1.65) 式の解は存在しない．

以上は，$\boldsymbol{A}$ が 2 行 2 列でランクが 1 の場合に解が存在しない例であったが，「必ず存在しないか？」というとそうでもない．それは $\boldsymbol{b}$ の方向による．

**（例 2）**

(1.65) 式とは $\boldsymbol{b}$ が異なる例として，

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{1.68}$$

すなわち，

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{1.69}$$

について考えてみよう．この場合，左辺の線形結合が示す直線の方向と，右辺の $\boldsymbol{b}$ の方向が一致している（図 1.59 参照）．

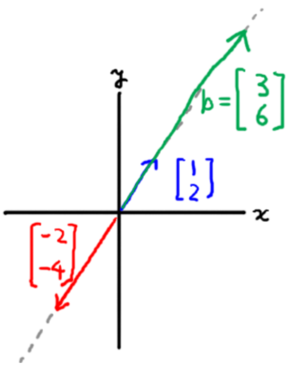


図 1.59　$\boldsymbol{A}$ に含まれるベクトルと $\boldsymbol{b}$

したがって，(1.69) 式を満たす $x_1$, $x_2$，すなわち，連立一次方程式の解が存在する．ただし，その解は一意ではなく何通りも存在する．例えば，

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \tag{1.70}$$

などは，どれも (1.69) 式を満たすし，これら以外にも解は無数にある．

ここまでの考察をまとめておこう．一般につぎのことが言える．

> $\boldsymbol{A}$ が 2 行 2 列でランクが 1 の場合，連立一次方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の解が存在するかどうかは，ベクトル $\boldsymbol{b}$ の方向による．
> $\boldsymbol{b}$ の方向が，$\boldsymbol{A}$ に含まれるベクトルの線形結合がつくる直線の方向と異なる場合には解が存在しない．
> $\boldsymbol{b}$ の方向が，$\boldsymbol{A}$ に含まれるベクトルの線形結合がつくる直線の方向と一致する場合には解が無数に存在する．

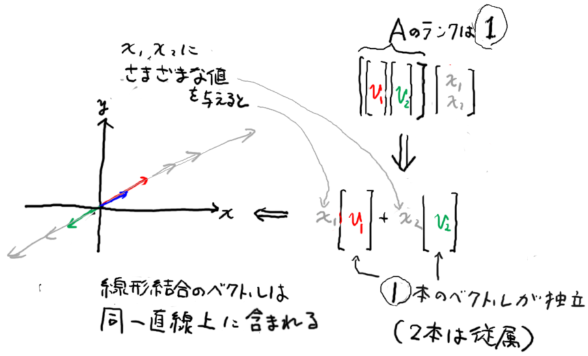


図 1.60　$\boldsymbol{A}$ のランクが 1 のとき $\boldsymbol{Ax}$ がつくる空間

2 行 2 列の行列 $\boldsymbol{A}$ **のランクが** 1 **の場合，**$\boldsymbol{x}$ **がさまざまな値をとることによって** $\boldsymbol{Ax}$ **がつくる空間は，**2 **次元平面全体でなく，**1 **本の直線になる（図 1.60）．**その直線と $\boldsymbol{b}$ の方向が一致するかどうかが解の存在条件となる．

## 1.10.4　ランクを用いた解の存在条件

**ランクの値と解の存在**

行列 $\boldsymbol{M}$ のランクの値を「rank$\boldsymbol{M}$」と書くことにする．例えば

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.71}$$

のとき

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{M} = 2 \tag{1.72}$$

であり，

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \tag{1.73}$$

のとき

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{M} = 1 \tag{1.74}$$

である．

これまで見てきた例において，連立一次方程式の解が存在するかしないかの条件は，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{b}$ がどんな行列とベクトルであるかが関係するのだが，その条件をランクを用いて簡潔に表わすことができる．そこでは，rank$\boldsymbol{A}$ と rank$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ の値が関係する．

**解が存在しない条件**

まず，第 1.10.3 節の例 1 では

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix} \tag{1.75}$$

であり，解が存在しなかった．ランクを調べてみると，

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{bmatrix}=1 \tag{1.76}$$

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 5\end{bmatrix}=2 \tag{1.77}$$

であり，

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}<\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\end{bmatrix} \tag{1.78}$$

となっている．すなわち，$\boldsymbol{b}$ を追加することにより，ランクの値が増えている．その意味は，$\boldsymbol{A}$ に含まれるベクトルだけでつくられる空間（この例では直線）とは異なる方向を $\boldsymbol{b}$ が向いているということである（図 1.61）．

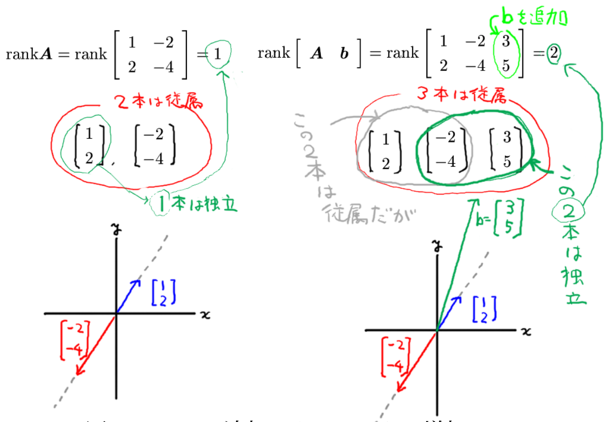


図 1.61　$\boldsymbol{b}$ の追加によるランクの増加

一般にはつぎのことが言える．

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}<\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\end{bmatrix} \tag{1.79}$$

のとき，連立一次方程式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ の解は存在しない．

「行列のランク」の意味は，「行列の中に含まれる独立なベクトルの最大本数」である．$\boldsymbol{b}$ を追加することによって独立なベクトルの本数が増えたということは，$\boldsymbol{b}$ がそれまでにない新たな方向を持っており，$\boldsymbol{A}$ の中にあるベクトルの線形結合では $\boldsymbol{b}$ を表わせないことを意味する．この状況を (1.79) 式はランクを用いて表現している．

**解が存在する条件**

第 1.10.3 節の例 2 では

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix} \tag{1.80}$$

であり，解が存在した．ランクを調べてみると，

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = 1 \tag{1.81}$$

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} = 1 \tag{1.82}$$

であり，

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \tag{1.83}$$

となっている．$\boldsymbol{b}$ を追加してもランクの値は増えないということは，独立なベクトルの本数は変わらず 1 本ということである．その意味は，$\boldsymbol{A}$ に含まれるベクトルでつくられる直線と同じ方向を $\boldsymbol{b}$ が向いている（図 1.62）ということである．

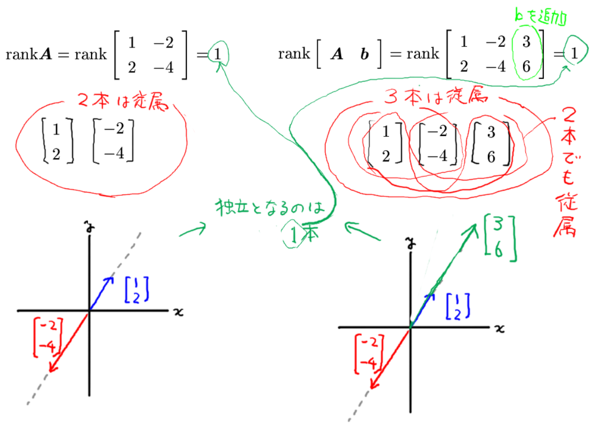


図 1.62　$\boldsymbol{b}$ の追加によってもランクが不変

一般にはつぎのことが言える．

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \tag{1.84}$$

のとき，連立一次方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の解が存在する．

$\boldsymbol{Ax}$ がつくる空間に $\boldsymbol{b}$ が含まれていれば連立一次方程式の解が存在する．そのことを (1.84) 式はランクを用いて表している．

もう一つ例を見ておこう．第 1.10.3 節の例では解が存在した．この例でも (1.84) 式が成り立っていることを確認してみよう．ここでは，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{1.85}$$

であった．ランクを調べてみると，

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \tag{1.86}$$

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = 2 \tag{1.87}$$

であり，

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \tag{1.88}$$

が成り立っていることが確認できる．

この例では $\boldsymbol{A}$ のランクが 2 であり，2 次元ベクトルを集めた行列のとり得るランクとしては最も大きい数となっている．そこへ $\boldsymbol{b}$ を追加したところでランクの値は増えることはあり得ない．$\boldsymbol{b}$ を加えた 3 本の 2 次元ベクトルは一次従属となり，$\boldsymbol{b}$ が他の 2 本（$\boldsymbol{A}$ に含まれていた 2 本の独立なベクトル）の線形結合で表わされ，解が存在することになる．

(1.84) 式は連立一次方程式の解の存在条件として知られている．この資料では $\boldsymbol{A}$ が 2 行 2 列の場合で説明してきたが，(1.84) 式の条件は，$\boldsymbol{A}$ が何行何列であっても成立する．この他にも $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{b}$ を用いた存在条件があるが，それらについては別の機会に紹介したい．

### 1.10.5　$\boldsymbol{A}$ が 3 行 3 列の場合

**$\boldsymbol{A}$ が 3 行 3 列でランクが 3 の場合**

行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが 3 の場合，その中には 3 本の独立なベクトルが含まれている．それら 3 本の線形結合によってどんな 3 次元ベクトルでも表現できる．すなわち，**rank$\boldsymbol{A}=3$ のとき，$\boldsymbol{x}$ がさまざまな値をとることによってつくられる $\boldsymbol{Ax}$ の空間は 3 次元空間全体になる**（図 1.63）．

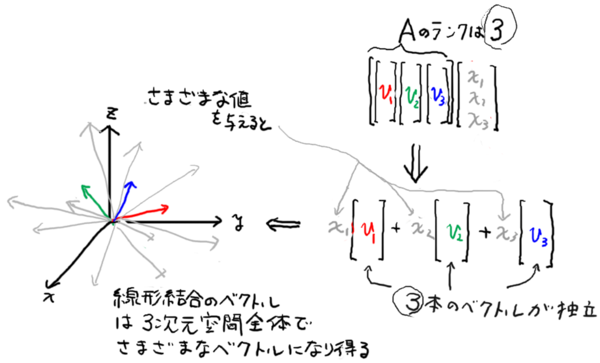


図 1.63　$\boldsymbol{A}$ のランクが 3 のとき $\boldsymbol{Ax}$ がつくる空間

$\boldsymbol{b}$ がどんな 3 次元ベクトルであっても，それは $\boldsymbol{Ax}$ のつくる空間の中に含まれるので，

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \tag{1.89}$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ が存在する．

> $\boldsymbol{A}$ が 3 行 3 列でランクが 3 の場合，$\boldsymbol{b}$ がどんな 3 次元ベクトルでも連立一次方程式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ の解は存在する．その解は一意（何通りもあるのではなく，ただ一通りだけ）である．

**$\boldsymbol{A}$ が 3 行 3 列でランクが 2 の場合**

行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが 2 の場合，その中の 3 本のベクトルは一次従属となり，独立なベクトルの組み合わせは最大で 2 本である．それら 3 本中の 1 本は他の 2 本の線形結合で表され，3 本の始点をそろえると図 1.64 のように同一平面上に乗る．そして，それら 3 本の線形結合もやはり同じ平面上に限られる．すなわち，**rank$\boldsymbol{A}=2$ のとき，$\boldsymbol{x}$ がさまざまな値をとることによってつくられる $\boldsymbol{Ax}$ の空間は 3 次元空間全体ではなく，ある 1 つの平面上に限られる**（図 1.64 参照）．

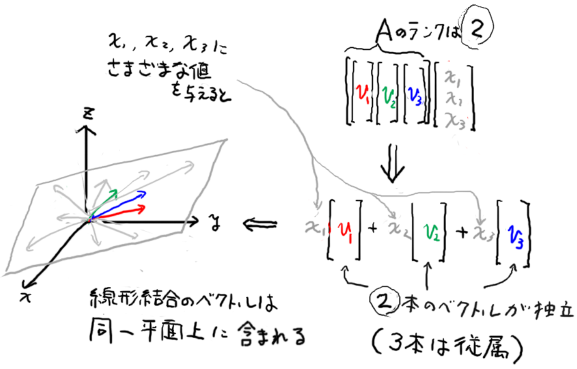


図 1.64 $\boldsymbol{A}$ のランクが 2 のとき $\boldsymbol{Ax}$ がつくる平面

連立一次方程式の解の存在について考えてみよう．

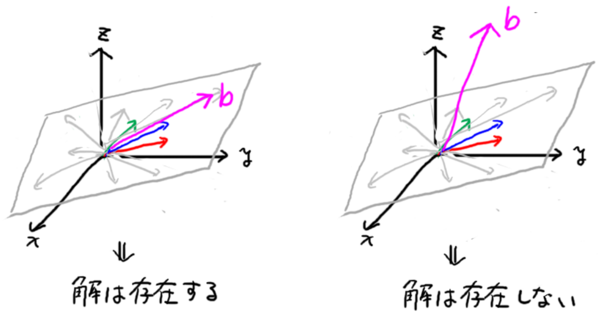


図 1.65 $\boldsymbol{b}$ の方向による解の存在の有無

$\boldsymbol{Ax}$ のつくる平面にベクトル $\boldsymbol{b}$ の始点をそろえた状況を考えることによって（図 1.65 参照），つぎのことが言える．

$\boldsymbol{A}$ が 3 行 3 列でランクが 2 の場合，連立一次方程式

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{1.90}$$

が存在するかしないかはベクトル $\boldsymbol{b}$ の方向による．ベクトル $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{Ax}$ のつくる平面に含まれるならば，解が存在し，そうでなければ解は存在しない．解が存在する場合には一意ではなく無数にある．

**$\boldsymbol{A}$ が 3 行 3 列でランクが 1 の場合**

行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが 1 の場合，その中の 3 本のベクトルは一次従属となる．さらに 3 本からどの 2 本をとってもやはり一次従属となる．3 本でも 2 本でも一次従属ということは，3 本のベクトルの方向がある 1 つの方向（あるいはその逆方向）しか向いていないということであり，3 本の始点をそろえると図 1.66 のように同一直線上に乗る．そして，それら 3 本の線形結合もやはり同じ直線上に限られる．すなわち，$\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = 1$ **のとき，$\boldsymbol{x}$ がさまざまな値をとることによってつくられる $\boldsymbol{Ax}$ の空間は 3 次元空間全体ではなく，ある 1 つの直線上に限られる**（図 1.66）．

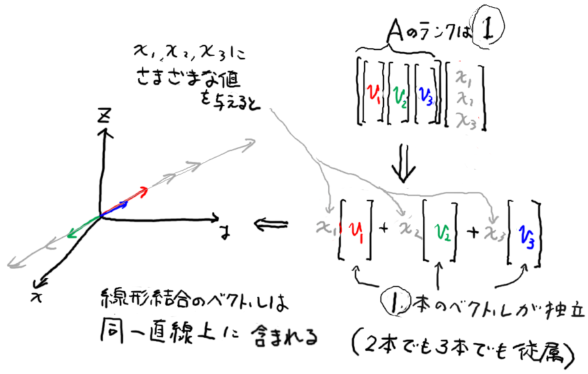


図 1.66　$\boldsymbol{A}$ のランクが 1 のとき $\boldsymbol{Ax}$ がつくる直線

連立一次方程式の解の存在について考えてみよう．

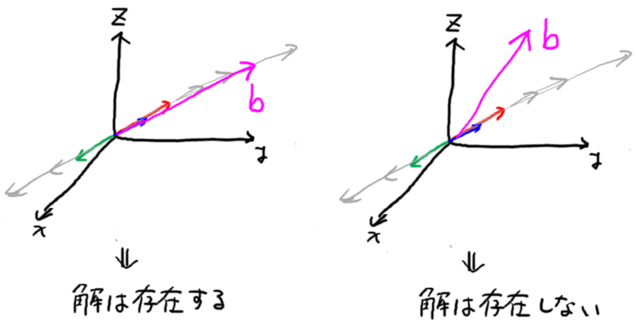


図 1.67　$\boldsymbol{b}$ の方向による解の存在の有無

$\boldsymbol{Ax}$ のつくる直線にベクトル $\boldsymbol{b}$ の始点をそろえた状況を考えることによって（図 1.67 参照），つぎのことが言える．

$\boldsymbol{A}$ が 3 行 3 列でランクが 1 の場合，連立一次方程式

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{1.91}$$

が存在するかしないかはベクトル $\boldsymbol{b}$ の方向による．ベクトル $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{Ax}$ のつくる直線に含まれるものならば，解が存在し，そうでなければ解は存在しない．解が存在する場合には一意ではなく無数にある．

### 1.10.6　ランクを用いた解の存在条件

$\boldsymbol{A}$ が 3 行 3 列であっても，2 行 2 列の場合と同様に，連立一次方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の解が存在する条件は，つぎのランクを用いた式で表わされる．

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = \mathrm{rank}\left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \end{array}\right] \tag{1.92}$$

のとき，連立一次方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の解が存在する．

この条件は，$\boldsymbol{A}$ のランクが 3 でも 2 でも 1 でも適用できる．

### 1.10.7　特異行列と正則行列

$\boldsymbol{A}$ を正方行列として，そのランクの値が小さい場合と大きい場合を比較してみよう．

まず小さい場合として，例えば $\boldsymbol{A}$ が 3 行 3 列の行列で，ランクが 1 の場合を考えてみる．$\boldsymbol{A}$ には 3 本のベクトルが含まれているが，それらは同じ方向を向いている（図 1.68 参照）．3 次元空間全体でいろいろな方向を向く $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{A}$ で変換しても，$\boldsymbol{Ax}$ の方向はやはり同じ方向を向く．この意味で $\boldsymbol{A}$ はさまざまなベクトルを変換して狭い空間（この場合，同一直線上）に「押し込めてしまう」という少し変わった作用がある．

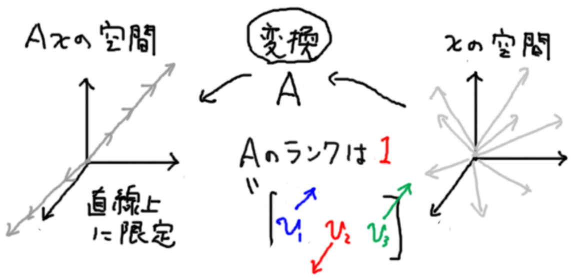


図 1.68　ランク 1 の行列による変換

逆に $\boldsymbol{A}$ が 3 行 3 列の行列で，ランクが最大の 3 の場合を考えてみる．$\boldsymbol{A}$ に含まれている 3 本のベクトルは独立でばらばらな方向を向いている（図 1.69 参照）ので，$\boldsymbol{Ax}$ が狭い空間に限定されるようなことはない．3 次元空間全体でいろいろな方向を向く $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{A}$ で変換した $\boldsymbol{Ax}$ もやはり 3 次元空間全体でさまざまな方向を向く．変換前と変換後のベクトルが 1 対 1 に対応するので，逆変換も存在する．それゆえ，$\boldsymbol{A}$ の逆行列も存在する．

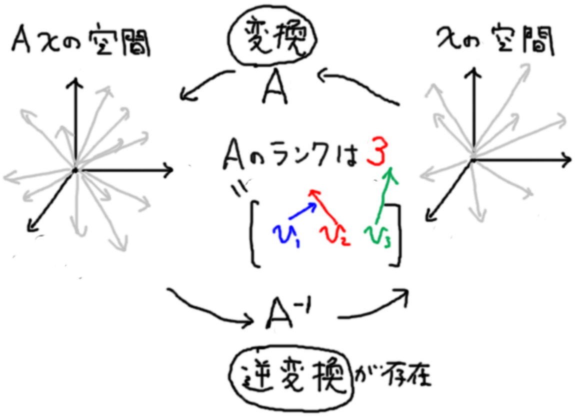


図 1.69　ランク 3 の行列による変換

3 次元空間を 3 次元空間に対応させるのが通常の自然な変換だとすれば，3 次元空間を直線に押し込めるような変換は「特異」な変換ということになる．一般に，$n$ 行 $n$ 列であるのにランクが $n$ 未満と小さくなっている行列を「**特異行列**」と呼ぶことがある．一方，$n$ 行 $n$ 列でランクが $n$ の行列を「**非特異行列**」あるいは「**正則行列**」という．

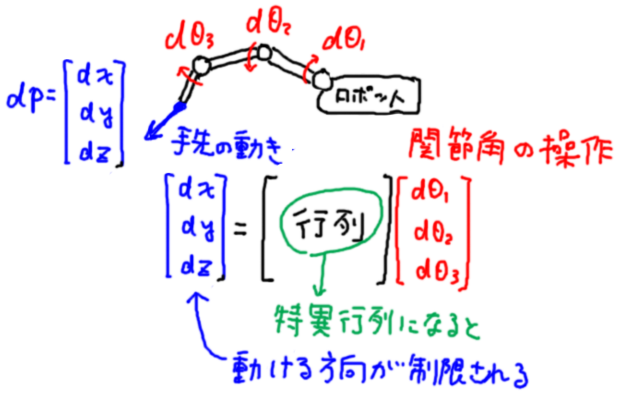


図 1.70　関節角変化と手先位置変化の関係

ロボットの関節角の操作と，手先が動く方向の対応関係は行列を用いて表される（図 1.70）．この行列はたいていの場合には正則行列になるが，ロボットがある特殊な姿勢をとると（腕がある特別な角度になると）特異行列になることがある．特異行列になりランクの値が小さくなると，関節角を自由に動かせても，手先が動くことのできる空間が狭くなり，動く方向に制限が生じてしまう．

このように，工学や技術においては，行列のランクが小さい特異行列はできれば避けたい行列として現れることが多い．与えられた行列が特異行列なのか正則行列なのかを簡単に見分ける方法があると便利であり，それには次節で述べる行列式が用いられる．

## 1.11　行列式

ここで扱う行列は正方行列に限定する．与えられた行列が特異行列なのか正則行列なのかを見分けるとき，「行列式」を用いるのが便利である．正方行列の行列式の値が 0 でなければ，その行列は正則行列であり，逆行列の存在がする．

行列式の値は，機械的で単純な計算によって計算できるので，ランクや逆行列を求めるときに活用されることが多い．

### 1.11.1　行列式の計算方法

行列式は正方行列から計算される値であり，行列 $\boldsymbol{M}$ の行列式を $\det\boldsymbol{M}$ と書いたり，$|\boldsymbol{M}|$ と書いたりする．

「det」は「determinant（デターミナント）」の略である．

例えば 2 次の正方行列

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{1.93}$$

の行列式は

$$|\boldsymbol{M}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{1.94}$$

と計算される．

3 次の正方行列

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \tag{1.95}$$

の行列式は，

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{M}| = m_{13}m_{21}m_{32} + m_{11}m_{22}m_{33} + m_{12}m_{23}m_{31} \\
-m_{12}m_{21}m_{33} - m_{13}m_{22}m_{31} \\
-m_{11}m_{23}m_{32}
\end{aligned}
\tag{1.96}
$$

となる．

上は 2 次と 3 次の例であったが，一般に $n$ 次の正方行列の行列式が定義されている．

（補足 1）一般的な行列式の定義は，行列の各列から 1 づずつ数を取り出し，それらを掛けたものに符号を付けて足し合わせたものとされている．各列からどの数を取り出し，掛けたものの符号をどう付けるかについては，ある規則に基づいている．その規則は「偶置換」や「奇置換」という数の置き換えに基づいて定義されている．詳細を知りたい場合は線形代数の参考書をご覧いただきたい．

(1.96) 式は憶えにくいが「サラスの方法」という計算法がある．ただし，これを適用できるのは 3 行 3 列の場合に限られる．この方法とは別に，ある列（あるいは行）に関する「余因子展開」と呼ばれる方法があり，3 行 3 列に限らない一般的な方法である．

例えば，第 1 列に関する余因子展開を (1.95) 式に適用すると，

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{M}| &= \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} \\
&= m_{11}\begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} - m_{21}\begin{vmatrix} m_{12} & m_{13} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} \\
&\quad + m_{31}\begin{vmatrix} m_{12} & m_{13} \\ m_{22} & m_{23} \end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.97}
$$

によって計算できる．計算結果は (1.96) 式に一致する．

この拡張として，4 次の正方行列

$$
\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}
\tag{1.98}
$$

の行列式は，

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{M}| &= \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix} \\
&= m_{11}\begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix} \\
&\quad - m_{21}\begin{vmatrix} m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix} \\
&\quad + m_{31}\begin{vmatrix} m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix} \\
&\quad - m_{41}\begin{vmatrix} m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.99}
$$

によって計算できる．

### 1.11.2 ランクと行列式の関係

2 行 2 列の例として，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \tag{1.100}$$

について考えてみよう．この行列を

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} \tag{1.101}$$

と 2 本のベクトルに分解すると一次従属であり，行列 $\boldsymbol{A}$ のランクは 1 であることがわかる．

$\boldsymbol{A}$ の行列式の値を求めてみよう．

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 2 = 0 \tag{1.102}$$

と零になっている．このようにランクが小さくなっている行列の行列式は 0 になる．なお，(1.100) 式の $\boldsymbol{A}$ は特異行列であり，逆行列は存在しない．

別の例を見てみよう．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \tag{1.103}$$

は**正則行列**である．$\boldsymbol{A}$ のランクは 2 であり，2 行 2 列がとり得るランクの値としては最大になっている．行列式は，

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 1 \neq 0 \tag{1.104}$$

であり零ではない．(1.103) 式の $\boldsymbol{A}$ は正則行列であり，逆行列が存在する．逆行列を求めてみると，

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 5 - 2 \cdot 2} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.105}$$

となる．上式で現れた $1 \cdot 5 - 2 \cdot 2$ は実は行列式 $|\boldsymbol{A}|$ であり，一般に $\boldsymbol{A}$ の逆行列は（それが存在するならば)，

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \begin{bmatrix} \\ \text{行} \quad \text{列} \\ \\ \end{bmatrix} \tag{1.106}$$

という式で書き表すことができる（上式の右辺の行列は「余因子行列」と呼ばれるものである）．(1.106) 式には $|\boldsymbol{A}|$ の割り算が含まれているので，逆行列が存在するためには $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ でなければならないことがわかる．

### 1.11.3 正則行列の性質

前節の後半では正則行列の性質で述べられている．その性質をここでまとめておく．**$\boldsymbol{A}$ は $n$ 行 $n$ 列の正則行列 とする**．このとき，つぎのことが言える．

- $\boldsymbol{A}$ の行列式 $|\boldsymbol{A}|$ は零ではない．
- $\boldsymbol{A}$ のランクは $n$ である．
- $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在する．
- 連立一次方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ として一意に定まる．

### 1.11.4　行列式の利用法

上で述べたことを繰り返すことになるが，ここで行列式の役割について述べておく．$n$ 行 $n$ 列の行列 $\boldsymbol{A}$ について，つぎのような問題を考えるときには行列式が有効である．

- $\boldsymbol{A}$ は正則行列か？
- $\boldsymbol{A}$ のランクは $n$ か？
- $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ は存在するか？
- 連立一次方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の解が一意に定まるか？

これらの問いに対しては，$|\boldsymbol{A}| \neq 0$ ならば「yes」，$|\boldsymbol{A}| = 0$ ならば「no」と答えることができる．

（補足 1）連立一次方程式の解が「一意に定まるか？」という問題に対しては $\boldsymbol{A}$ の行列式で判別できる．しかし「解が存在するか？」という問題に対しては注意が必要である．$|\boldsymbol{A}| \neq 0$ ならば解が存在するが，$|\boldsymbol{A}| = 0$ のときは解が存在する場合もあればしない場合もある．これを判定するには，例えば (1.92) 式のように $\boldsymbol{b}$ も含めた条件を用いなければならない．

（補足 2）$|\boldsymbol{A}| \neq 0$ のとき，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の解は，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{1.107}$$

によって求めることができる．これは $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めて $\boldsymbol{b}$ を掛ければよいのだが，これとは異なる計算法として「Cramer の公式」がある．

### 1.11.5　正則行列による変換

$\boldsymbol{T}$ は $n$ 行 $n$ 列の**正則行列**とし，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{z}$ はともに $n$ 次元ベクトルとする．ベクトル $\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{Tx} \tag{1.108}$$

によって，$\boldsymbol{z}$ に変換することを考える．このような，正則行列を用いたベクトルの変換を**正則変換**という．

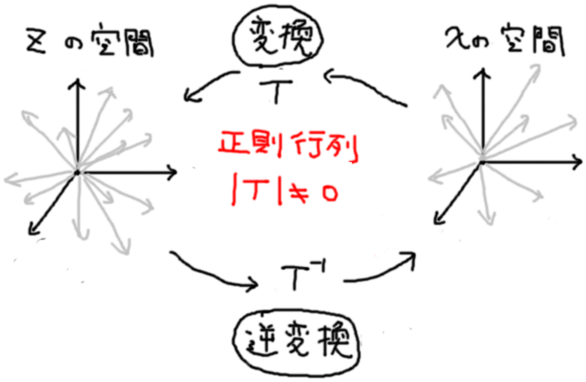


図 1.71　正則変換

正則行列には逆行列が存在し，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{z} \tag{1.109}$$

という逆変換が可能である．これよりつぎのことが言える．

$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{z}$ が正則行列 $\boldsymbol{T}$ によって $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{Tx}$ と関係づけられているとき，

- $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{z}$ が一対一に対応する．
- $\boldsymbol{x}$ が $n$ 次元空間全体でさまざまなベクトルになるとき，$\boldsymbol{z}$ も $n$ 次元空間全体でさまざまなベクトルになる．
- $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ であり，逆に $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である．

ここで述べたことは第 1.10.7 節の図 1.69 で 3 次元の場合として見てきたが，3 次元だけでなく $n$ 次元でも同様なことが言えるのである．

このような正則行列を用いた変換は工学の分野ではよく現れる．時間とともに変化する信号のベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ が $\mathbf{0}$ に収束するかどうかを解析するとき，$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}(t)$ で変換した $\boldsymbol{z}(t)$ を考え，これが $\mathbf{0}$ へ収束するかを解析する方法をとることがある．

### 1.11.6　行列式の性質

$\boldsymbol{M}_1$ と $\boldsymbol{M}_2$ はともに $n$ 次の正方行列であるとする．このとき，

$$|\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2| = |\boldsymbol{M}_1| \cdot |\boldsymbol{M}_2| \tag{1.110}$$

が成り立つ．すなわち，積の行列式は，それぞれの行列式の積となる．また，単位行列 $\boldsymbol{I}$ に対しては

$$|\boldsymbol{I}| = 1 \tag{1.111}$$

が成り立つ．

また $M$ を転置しても行列式の値は変わらない．すなわち，

$$|\boldsymbol{M}^T| = |\boldsymbol{M}| \tag{1.112}$$

が成り立つ．

### 1.11.7　行列式を簡単に求められる行列

行列 $\boldsymbol{M}$ が対角行列で

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.113}$$

のとき，その行列式は

$$|\boldsymbol{M}| = m_{11}m_{22}\cdots m_{nn} \tag{1.114}$$

で計算できる．

行列 $\boldsymbol{M}$ が上三角行列で

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{nn} \\ 0 & m_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & m_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & m_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.115}$$

のとき，あるいは下三角行列で

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & m_{n,n-1} & m_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.116}$$

のときも，その行列式は

$$|\boldsymbol{M}| = m_{11}m_{22}\cdots m_{nn} \tag{1.117}$$

で計算できる．

行列の中に行列がある場合について述べておく．$\boldsymbol{M}_{11}$, $\boldsymbol{M}_{22}$ は正方行列で，

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{22} \end{bmatrix} \tag{1.118}$$

のとき，

$$|\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{M}_{11}|\,|\boldsymbol{M}_{22}| \tag{1.119}$$

で計算できる．

同様に，$\boldsymbol{M}_{11}$, $\boldsymbol{M}_{22}$ は正方行列で，

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22} \end{bmatrix} \tag{1.120}$$

のときも，

$$|\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{M}_{11}|\,|\boldsymbol{M}_{22}| \tag{1.121}$$

で計算できる．

### 1.11.8 行列のランクと行列式

**行列式によるランクの判定**

$n$ 次正方行列の階数（ランク）が $n$ かどうかを判別するとき，行列式が 0 でないかどうかで判別できることはすでに述べた．

例えば，3 行 3 列の正方行列の行列式が 0 だったら，「その行列のランクは 3 ではない」といえる．では，ランクは 2 なのか 1 なのか？，それを行列式を使って求める方法がある．ここでは，与えられた行列のランクの値を行列式を使って求める方法を説明する．

### 1.11.9 小行列式を用いる方法

まずは「小行列式」を説明する．$\boldsymbol{M}$ を $n$ 行 $m$ 列の行列とする（正方とは限らない）．$\boldsymbol{M}$ の行と列からそれぞれ $r$ 本を選び出し，$r$ 行 $r$ 列の正方行列をつくったとする．その行列式を「$\boldsymbol{M}$ からつくられる $r$ 次の小行列式」と呼ぶ．

$r \leq \min(n,m)$ である．また，$r$ 本の行と列の選び方の数は ${}_nC_r \times_m C_r$ 通りなので，$r$ 次の小行列式はその数だけ存在する．

では，行列のランクの値を小行列式を使って求める方法を説明する．ある行列 $\boldsymbol{M}$ があり，「$\boldsymbol{M}$ からつくられる $k+1$ 次の小行列式がすべて 0 で，$k$ 次の小行列式には 0 でないものが（1つでも）存在する」とき，「その $k$ の値が行列 $\boldsymbol{M}$ のランク」である．

これはつぎのようにも言える．「$\boldsymbol{M}$ の中から行と列を選び出して，できるだけ大きな次数の正則行列を作るとする．その最大次数がランクの値になる」，すなわち，「行列の中に含まれている正則行列の最大次数」とも言える．

上で述べたことの証明については線形代数の参考書を参照されたいが，行列のランクの意味（行列に含まれている独立なベクトルの最大本数）を考えれば上で述べたことにはおおよそ納得がいくと思う．

（例１）具体例として，正方行列

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.122}$$

のランクの値を求めてみよう．まず，$\boldsymbol{M}$ の行列式を計算してみると，

$$|\boldsymbol{M}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (\text{計算は省略}) = 0 \tag{1.123}$$

となり，3 次の行列式が 0 なので「ランクは 3 ではない」といえる．では，3 でければ 2 か 1 か？

つぎにランクが 2 かどうか調べてみよう．それには 2 次の小行列式で 0 でないものがあるかどうかを調べることになる．例えば，図 1.72 のように 2 次の小行列式をつくると 0 になるが，これだけでは結論は出ない．

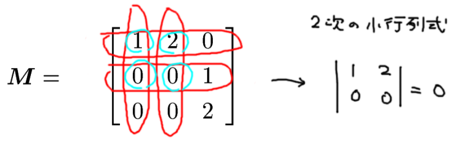


図 1.72　0 になる 2 次の小行列式

別の小行列式として，図 1.73 のように 2 次の小行列式をつくると 0 でないものができる．

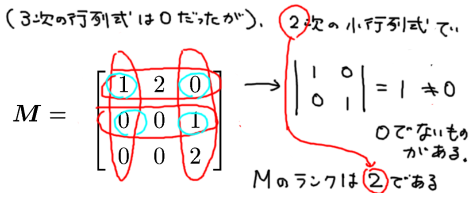


図 1.73　0 でない 2 次の小行列式

「3 次の行列式は 0 だったが，2 次の小行列式で 0 でないものが存在した」ので，「$\boldsymbol{M}$ のランクは 2 である」という結論が得られる．
（例 2）正方行列ではない例を見てみよう．

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \tag{1.124}$$

の場合，2 次の小行列式は

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \tag{1.125}$$

の 3 つがあるが，これらの値を計算するとすべて 0 になる．したがって，まずは「ランクは 2 ではない」といえる．1 次の小行列式は

$$1,\ 2,\ 2,\ 4,\ 3,\ 6 \tag{1.126}$$

の 6 個が存在し，0 でないものが存在するので，(1.124) 式の $\boldsymbol{M}$ のランクは 1 となる．

（例 3）

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \tag{1.127}$$

の場合，2 次の小行列式は

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \tag{1.128}$$

である．このうち

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \tag{1.129}$$

であり，2 次の小行列式に 0 でないものが存在するので，(1.127) 式の $\boldsymbol{M}$ のランクは 2 である．

# 第 2 章

# 行列の固有値

## 2.1 行列の固有値

### 2.1.1 システムの時間的推移と行列の $k$ 乗

時間が 1 秒経過すると値が変化するベクトルについて考えてみよう．時刻 0 秒のときのベクトル $\boldsymbol{x}_0$ は値が決定済みとする．ある時刻 $i$ のベクトルは $\boldsymbol{x}_i$ に対して，その 1 秒後の時刻 $i+1$ 秒のベクトル $\boldsymbol{x}_{i+1}$ が

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_i \tag{2.1}$$

によって定まるとする．すなわち，1 秒経過するごとに $\boldsymbol{M}$ が掛けられていく．ただし，$\boldsymbol{M}$ は正方行列とする．

この規則に従うと，時刻 1 秒のベクトルは

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_0 \tag{2.2}$$

となり，時刻 2 秒でのベクトル $\boldsymbol{x}_2$ は

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{x}_0 \tag{2.3}$$

である．一般に，時刻 $k$ 秒のベクトル $\boldsymbol{x}_k$ は

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{M}^k\boldsymbol{x}_0 \tag{2.4}$$

と表される．

$\boldsymbol{x}_k$ がシステムの状態を表すベクトルだとすると，(2.1) 式は状態の移り変わりの規則であり，(2.4) 式は，時刻 $k$ における状態を表している．このようなシステムの状態が時間の経過とともにどう推移していくのかを知るには，

$$\boldsymbol{M}^k \text{ ，あるいは，} \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{M}^k$$

がどんな行列になるかが関わっている．

(2.4) 式の形式は一例に過ぎないが，$\boldsymbol{M}^k$ はシステムの特性解析においてしばしば現れるので，その計算法や，$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{M}^k$ の性質を調べておくことは重要である．

### 2.1.2 対角行列の扱い易さ

例えば，

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

のとき，$\boldsymbol{M}^k$ の各要素がどうなるかは，すぐには見通しがつかない．

しかし，

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

という対角行列であれば，

$$\boldsymbol{\Lambda}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

であり，各要素を式で表すことができる．また，これに対して $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{\Lambda}$ を考えると，対角要素の $2^k$ と $3^k$ が発散していくことが見てとれる．

別の例として，

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

という対角行列であれば，

$$\boldsymbol{\Gamma}^k = \begin{bmatrix} 0.2^k & 0 \\ 0 & 0.3^k \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

であり，

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{\Gamma}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

となることもわかる．

このように，行列が対角行列の場合には，$k$ 乗や $k \to \infty$ の極限（$k$ が時間を表す場合には，定常状態での値）を容易に求めることができる．

### 2.1.3　対角行列への変換

ラプラス変換を学んだとき，このような図があったことを思い出そう．

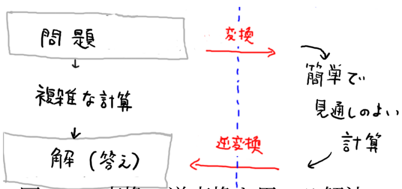


図 2.1　変換・逆変換を用いる解法

一般的な行列の $k$ 乗や極限の計算は複雑であるが，対角行列に限っては扱いが容易で計算が楽である．そこで図 2.1 にならって，図 2.2 のような変換について考えてみよう．

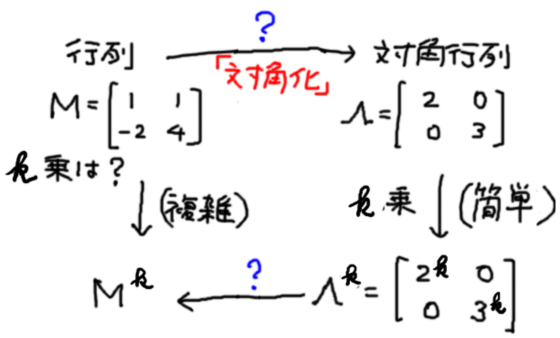


図 2.2　対角行列への変換

図 2.2 において，つぎの点が不明である．

- 行列 $\boldsymbol{M}$ から対角行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ をどう求めるか？
- $\boldsymbol{\Lambda}^k$ から $\boldsymbol{M}^k$ をどう求めるか？

上の答えの概略を書いておくと，ある特別な行列 $\boldsymbol{T}$ を用いて

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda} \tag{2.11}$$

によって対角行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ が導出される．また，

$$\boldsymbol{M}^k = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{T}^{-1} \tag{2.12}$$

によって $\boldsymbol{M}^k$ が求められる．

では，「ある特別な行列 $\boldsymbol{T}$」とはどんな行列か？これを理解するには行列 $\boldsymbol{M}$ の「固有値」と「固有ベクトル」について学ばなければならない．

### 2.1.4　固有値・固有ベクトルとは

**例題**

一般的な話は後回しにして，具体例を用いて説明していく．

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

とする．これに 2 次元ベクトル $\boldsymbol{v}$ を掛けて，$\boldsymbol{Mv}$ というつくる．そして，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の方向とベクトル $\boldsymbol{Mv}$ の方向を比べてみよう．

例えば，

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

とすると，

$$\boldsymbol{Mv} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

となり，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{Mv}$ は異なる方向を向く（図 2.3）．このように $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{Mv}$ の方向が違うのは珍しいことではなく，(2.14) 式以外の $\boldsymbol{v}$ でも，たいていの場合は $\boldsymbol{Mv}$ は違う方向を向く．

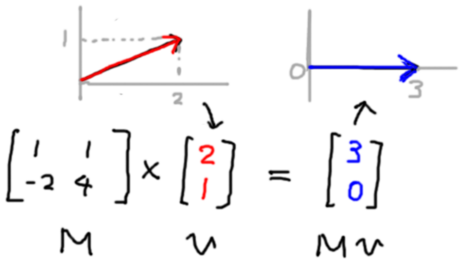


図 2.3　$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{Mv}$ の方向の違い

しかし，ある特別な $\boldsymbol{v}$ に対しては，$\boldsymbol{Mv}$ の方向が変わらないことがある．その 1 つは

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

である．$\boldsymbol{Mv}$ を計算してみると，

$$\boldsymbol{Mv} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

となり，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{Mv}$ は同じ方向を向く（図 2.4）．

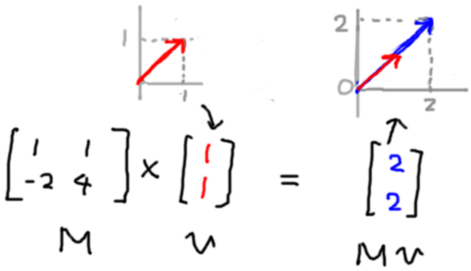


図 2.4　$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{Mv}$ の方向が一致する

他のいろいろなベクトルではこうはならず，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ のときには，$\boldsymbol{Mv}$ が元の $\boldsymbol{v}$ と同方向を向くのである．つまり，行列 $\boldsymbol{M} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ にとって，

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

は特別なベクトルである．

このほかにも

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

も特別なベクトルである．計算してみると

$$\boldsymbol{Mv} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

となる（図 2.5）．

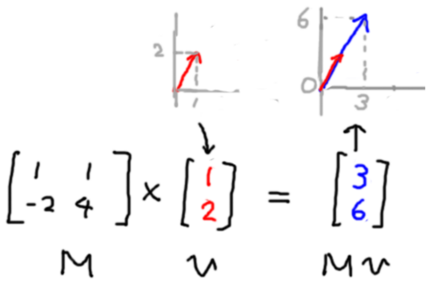


図 2.5　$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{Mv}$ の方向が一致する

上で出てきた特別な 2 本のベクトルを番号を付けて区別する．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

これらは $\boldsymbol{M}$ の「**固有ベクトル**」と呼ばれる．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を用いて (2.17) 式と (2.20) 式を書き直すと

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{v}_1\ ,\ \boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_2 = 3\boldsymbol{v}_2 \tag{2.22}$$

となる．上式に現れている 2 と 3 は，$\boldsymbol{M}$ の「**固有値**」と呼ばれる．

上の例では，2 次の実数行列が実数の固有値を持っている．この場合，掛けても方向が変わらないベクトルが「固有ベクトル」，掛けた結果のベクトルの長さが何倍になるかが「固有値」という言い方ができる．ただし，このような座標空間での解釈は，実数行列で固有値も実数の場合には可能だが，複素数の行列や複素固有値を持つ場合には困難になる．

### 固有値・固有ベクトル

(2.22) 式を一般的な行列の場合に拡張しよう．$\boldsymbol{M}$ は $n$ 次の正方行列で，要素は実数でも複素数でもよいとする．

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i,\quad i = 1, \cdots, n \tag{2.23}$$

を満たすスカラ $\lambda_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ と，零ベクトルではない $n$ 次元ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ を考える．$\lambda_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ を「行列 $\boldsymbol{M}$ の**固有値**」という．また，$\boldsymbol{v}_i$ を「固有値 $\lambda_i$ に対応する**固有ベクトル**」という．$\boldsymbol{M}$ が $n$ 次正方行列のとき，固有値の数は重複度も含めて（同じ値のものも区別して数えて）$n$ 個存在する．

**（補足）** 零ベクトル $\boldsymbol{0}$ は固有ベクトルとなる資格がない．すなわち，$\boldsymbol{v}_i \neq \boldsymbol{0}$ である．ただし，0 は固有値になる可能性がある．

(2.23) 式を行列とベクトルのサイズを意識して書くと図 2.6 のようになる．

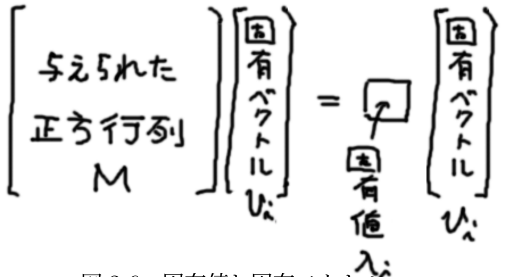


図 2.6　固有値と固有ベクトル

前節の例の場合，(2.22) 式よりつぎのことが言える．

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

の固有値は

$$\lambda_1 = 2\ ,\quad \lambda_2 = 3 \tag{2.25}$$

であり，それぞれの固有値に対応する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

である．

**（補足）** 固有値の順番を入れ替えて，

$$\lambda_1 = 3\ ,\quad \lambda_2 = 2 \tag{2.27}$$

としてもよい．ただし，(2.22) 式における対応関係は保たなければならないので，上式のように固有値を番号付けしたら，

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

と，固有ベクトルも入れ替わることになる．

### 2.1.5　固有値の求め方

**行列の基礎**

固有値の求め方を述べる前に，行列の基礎を 1 つ確認しておく．これは固有値の求め方だけではなく，行列を扱うさまざまな場面で必要となる知識である．

行列の前に，スカラで述べてみる．行列でなくスカラの $a$, $x$ において

$$ax = 0 \quad x \neq 0 \tag{2.29}$$

が成り立っているとする．このとき，$x \neq 0$ なので

$$a = 0 \tag{2.30}$$

である．

行列の場合にはつぎのことが言える．

> $\boldsymbol{A}$ が $n$ 次正方行列，$\boldsymbol{x}$ が $n$ 次元ベクトル，$\boldsymbol{0}$ が $n$ 次元の零ベクトルで，
>
> $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \tag{2.31}$$
>
> が成り立っているとする．このとき，
>
> $$|\boldsymbol{A}| = 0 \tag{2.32}$$
>
> が成り立つ．

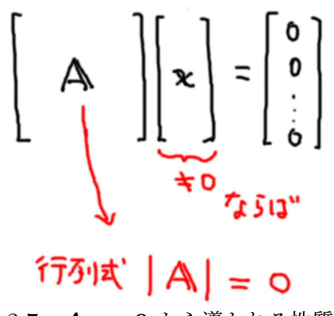


図 2.7　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ から導かれる性質

**（補足）** $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$（零行列）である必要はない．例えば，$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ であっても，

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

が成り立つ．なお，$|\boldsymbol{A}| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$ が成り立っている．

**（証明 1）** (2.31) 式から (2.32) 式が成り立つことを証明してみよう．もし (2.32) 式に反して $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ とすると，$\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在することになる．それを (2.31) 式の両辺に左から掛けると，$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{0}$ から $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が導かれるが，これは (2.31) 式における前提 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ に矛盾する．よって (2.32) 式が成り立たなければならない．

**（証明 2）** あるいはつぎのように考えることもできる．(2.31) 式における $\boldsymbol{A}$ を $n$ 本の縦ベクトルに分解し，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ を要素に分解して掛けると，(2.31) 式の意味は「$\boldsymbol{A}$ に含まれる $n$ 本の列ベクトルは 1 次従属である」ということになる．よって $|\boldsymbol{A}| = 0$ である．

**固有値の求め方**

　さて，正方行列 $\boldsymbol{M}$ が与えられたとき，固有値をいかに求めるかについて考察を戻そう．

　固有値が満たすべき条件式は (2.23) 式，あるいは図 2.6 で表される．行列 $\boldsymbol{M}$ が与えられたという状況では，固有値も固有ベクトルも未知になっている（図 2.8）．

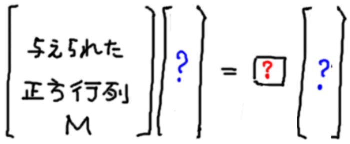


図 2.8　固有値・固有ベクトルを求める問題

　図 2.8 を式で書き表そう．未知数（固有値）を $\lambda$，未知ベクトル（固有ベクトル）を $\boldsymbol{v}$ とおくと，

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \tag{2.34}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{v}$ は固有ベクトルを表しているので，$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ である．この条件も併せて上式を書き直すと，

$$\lambda\boldsymbol{v} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\ ,\quad \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0} \tag{2.35}$$

となる．さらに $\boldsymbol{v}$ でくくると

$$(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\ ,\quad \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0} \tag{2.36}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{I}$ は単位行列である．

ここで上式の左辺を $(\lambda - \boldsymbol{M})\boldsymbol{v}$ と書いてはいけない．$\lambda$ は行列でなくスカラ，$\boldsymbol{M}$ は行列なので，$\lambda - \boldsymbol{M}$ はあり得ない演算である．

　さて，(2.36) 式には未知数 $\lambda$ と未知ベクトル $\boldsymbol{v}$ が含まれているが，まずは未知数 $\lambda$ から求めていこう．

　ここで，(2.31) 式と (2.36) 式は同じ形式をしていることに注意しよう．すると (2.32) 式の $|\boldsymbol{A}| = 0$ における $\boldsymbol{A}$ を $\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}$ に置き換えた式が成り立ち（図 2.9），つぎのことが言える．

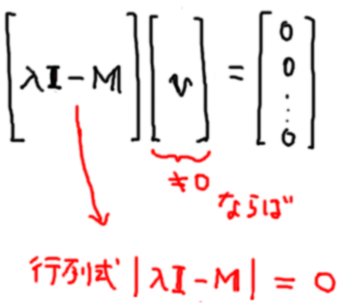


図 2.9　固有値を求める方程式

> 与えられた正方行列 $\boldsymbol{M}$ に対して，その固有値 $\lambda$ は
>
> $$|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}| = 0 \tag{2.37}$$
>
> を満たす．したがって，固有値は上式を $\lambda$ の方程式としたときの解として求められる．

　上の式は $\boldsymbol{M}$ **の特性方程式**と呼ばれる．$\boldsymbol{M}$ が $n$ 行 $n$ 列のとき，(2.37) 式は $n$ 次代数方程式となる．$n$ 次代数方程式には $n$ 個の根（実数あるいは複素数）が存在するので，固有値は $n$ 個になる．

（例題）

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

の固有値を求めよ．

(2.37) 式の左辺から計算していくと，

$$\begin{aligned} |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}| &= \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 4) - (-1) \cdot 2 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 + 2 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 6 \end{aligned} \tag{2.39}$$

となるので，特性方程式は

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \tag{2.40}$$

の 2 次方程式になる．この解は 2 と 3 なので，固有値は

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3 \tag{2.41}$$

である（$\lambda_1 = 3$，$\lambda_2 = 2$ としてもよい）．

本稿では，スカラおよびベクトルや行列の要素を実数だけに限定せず，複素数まで拡張して考える．したがって，固有値が複素数になる場合もあるとして考察を進めていく．つぎの例は，実数の行列であるが，固有値が複素数になる例である．

（例題）

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

の固有値を求めよ．

この場合，(2.37) 式は

$$\begin{aligned} \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right| &= \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 2)(\lambda + 1) + 1 \\ &= \lambda^2 + 3\lambda + 3 = 0 \end{aligned}$$

となる．この 2 次方程式の解は $-3/2 \pm (\sqrt{3}/2)j$ なので，固有値は

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \tag{2.43}$$

である．

行列が 3 行 3 列の場合でも，(2.37) 式で固有値を求めることできる．

（例題）

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

の固有値を求めよ．

(2.37) 式は

$$\begin{vmatrix} \lambda & -2 & -1 \\ 1 & \lambda-3 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$$
$$= (\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0$$

となる．この 3 次方程式の解として，固有値は

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2 \tag{2.45}$$

である．この例の場合，固有値は「1」と「2」の 2 種類しかないが，「2」については 2 つの「2」が重複していると見なして，固有値の個数は「1」,「2」,「2」の 3 個と考える．

3 行 3 列の行列の固有値は，3 次の特性方程式の解として，3 個存在する．一般に，$n$ 行 $n$ 列の行列の固有値は，$n$ 次の特性方程式の解として，$n$ 個存在する．

### 2.1.6　固有ベクトルの求め方

前節のように固有値を求められたとして，その固有値に対応する固有ベクトルの求める方法を述べる．例えば，$\lambda_1$ という固有値が求まったら，それを (2.23) 式に代入して得られる式,

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \tag{2.46}$$

すなわち,

$$(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})\,\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0} \tag{2.47}$$

を満たす $\boldsymbol{v}_1$ を求める．$\lambda_2$ に対応する固有ベクトルも

$$(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})\,\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \tag{2.48}$$

から求める．

具体例を見てみよう．

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{2.49}$$

の固有値を $\lambda_1, \lambda_2$ とするとき，それらに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を求めよ．

まずは固有値 $\lambda_1, \lambda_2$ を求めなければならないが，その方法は前節の (2.38) ～ (2.41) 式に書かれているので省略し，$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ と求められたとする．

まずは，固有値 $\lambda_1 = 2$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ を求める．$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ とおいて，$\alpha$ と $\beta$ の値を求めるとする．これらを (2.47) 式に代入すると

$$\left(2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.50}$$

となる．これを計算すると

$$\alpha - \beta = 0 \tag{2.51}$$
$$2\alpha - 2\beta = 0 \tag{2.52}$$

が得られる．上の 2 式はどちらも

$$\alpha = \beta \tag{2.53}$$

という式と等価であり，これを満たせばよい．例えば，$\alpha = 1$ とおくと $\beta = 1$ となり，固有ベクトルが

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

として求められる．

同様に，$\lambda_2 = 3$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_2$ を求める．$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ とおき，これらを (2.48) 式に代入すると

$$\left(3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

となる．この式より，

$$2\alpha - \beta = 0 \tag{2.56}$$

という式が得られ，例えば，$\alpha = 1$ と置くと $\beta = 2$ となり，固有ベクトルが

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.57}$$

として求められる．よって，$\boldsymbol{M}$ の固有値，$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$ に対応する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

である．

再度確認しておくと，固有値・固有ベクトルは次の図の関係を満たすものである．

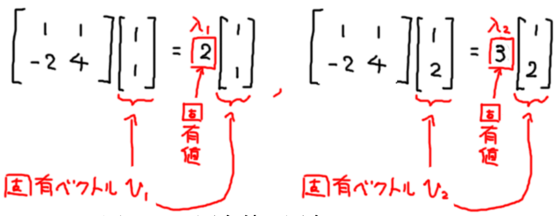


図 2.10　固有値と固有ベクトル

**固有ベクトルの自由度：**固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ を求めるときには，(2.53) 式を満たせばよいので，$\alpha = 2,\ \beta = 2$ でもよく，

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

としてもよい．あるいは $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$ でも $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 11 \\ 11 \end{bmatrix}$ でもよい．$\boldsymbol{v}_2$ についても同様で，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ でも $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -11 \\ -22 \end{bmatrix}$ でもよい．上の例に見られるように，それぞれの固有ベクトルは一つには定まらず，定数倍の自由度がある．

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.60}$$

の固有値を $\lambda_1, \lambda_2$ とするとき，それらに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を求めよ．

固有値はすでに (2.43) 式で求められている．固有値 $\lambda_1 = -3/2 + (\sqrt{3}/2)j$ に対応する固有ベクト

ルを $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ とおいて，$\alpha$ と $\beta$ の値を求める．固有ベクトルが満たすべき式は

$$\left\{\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

となる．この式より，

$$\alpha = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)\beta \tag{2.62}$$

という関係が得られる．$\beta = 1$ と置くと $\alpha = -1/2 + (\sqrt{3}/2)j$ となり，

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

として求められる．同様にして $\lambda_2 = -3/2 - (\sqrt{3}/2)j$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_2$ は

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

と求められる．このように，実数行列の固有値が複素数の場合，固有ベクトルの要素には複素数が含まれる．

### 2.1.7　固有値に関する性質

#### 行列式との関連

正方行列 $\boldsymbol{M}$ の固有値は,

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}| = 0 \tag{2.65}$$

という行列式を用いた方程式から求められる．第 1.11.6 節に書かれている行列式の性質を用いると，つぎに述べるさまざまな性質が導かれる．

#### 転置行列の固有値

正方行列 $\boldsymbol{M}$ の固有値のすべては，転置行列 $\boldsymbol{M}^T$ の固有値のすべてと同じである．

(1.112) 式の $|\boldsymbol{M}^T| = |\boldsymbol{M}|$ という性質を用いると，

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}| = \left|(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})^T\right| = \left|s\boldsymbol{I}^T - \boldsymbol{M}^T\right| = \left|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}^T\right| \tag{2.66}$$

が成り立つ．これより，

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}| = 0 \tag{2.67}$$

の解のすべては,

$$\left|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}^T\right| = 0 \tag{2.68}$$

の解すべてと同じである．

### ブロック行列の固有値

正方行列 $\boldsymbol{M}$ が

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{M}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

という構造をしているとする．ただし $\boldsymbol{M}_{11}$, $\boldsymbol{M}_{12}$ は正方行列である．このとき，$\boldsymbol{M}$ の固有値のすべては，$\boldsymbol{M}_{11}$ の固有値と $\boldsymbol{M}_{22}$ の固有値からなる．

(1.118) 式，(1.119) 式を用いると，

$$\begin{aligned} |s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}| &= \begin{vmatrix} s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}_{11} & -\boldsymbol{M}_{12} \\ \mathbf{0} & s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}_{22} \end{vmatrix} \\ &= |s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}_{11}| \cdot |s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}_{22}| \end{aligned} \tag{2.70}$$

と変形できる．これに 0 にする $\lambda$ が固有値なので，上で述べたことが成り立つ．

（例）

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 11 & 12 \end{bmatrix} \tag{2.71}$$

の固有値は 4 個あり，それらは，

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \tag{2.72}$$

の 2 つの固有値と，

$$\begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

の 2 つの固有値である．

同様に，

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

の固有値のすべては，$\boldsymbol{M}_{11}$ と $\boldsymbol{M}_{22}$ の固有値からなる．

**上三角（下三角）行列の固有値**

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & m_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & m_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.75}$$

の固有値は $m_{11}, m_{22}, \cdots, m_{nn}$ である．
同様に，

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & m_{n,n-1} & m_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.76}$$

の固有値も $m_{11}, m_{22}, \cdots, m_{nn}$ である．

**$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{MS}$ の固有値**

$\boldsymbol{M}$ は正方行列，$\boldsymbol{S}$ は正則行列とするとき，$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{MS}$ の固有値のすべては，$\boldsymbol{M}$ の固有値のすべてと同じである．

これはつぎのようにして証明できる．

$$\begin{aligned} \left|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{MS}\right| &= \left|\lambda \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S}-\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{MS}\right| \\ &= \left|\boldsymbol{S}^{-1}\left(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{S}\right| \\ &= \left|\boldsymbol{S}^{-1}\right|\cdot\left|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}\right|\cdot\left|\boldsymbol{S}\right| \\ &= \left|\boldsymbol{S}^{-1}\right|\cdot\left|\boldsymbol{S}\right|\cdot\left|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}\right| \\ &= \left|\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S}\right|\cdot\left|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}\right| \\ &= \left|\boldsymbol{I}\right|\cdot\left|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}\right| \\ &= \left|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}\right| \end{aligned} \tag{2.77}$$

となり，$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{MS}$ と $\boldsymbol{M}$ の特性方程式が等しい．上記の変形の中で，(1.110) 式，(1.111) 式を用いた．

# 2.2　行列の対角化

## 2.2.1　対角化とは

第 2.1.3 節での図を再び下に示す．

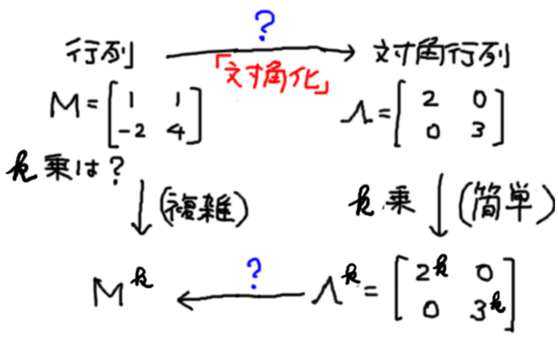


図 2.11　対角行列への変換

図 2.11 の上側で，行列 $\boldsymbol{M}$ から対角行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ が導出される過程が「対角化」と書かれ，その方法については「？」になっている．ここに該当する式は，

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda} \tag{2.78}$$

なのであるが，なぜこの式になるのか，上式の $\boldsymbol{T}$ が何なのかについてこれから説明していく．

対角化についてもう少し一般的に言うとつぎのようになる．正方行列 $\boldsymbol{M}$ があるとする．これにある特別な正則行列 $\boldsymbol{T}$ を使って（$\boldsymbol{T}$ がどんな行列かは後で述べる），

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{2.79}$$

とできるとき，$\boldsymbol{M}$ は**対角化可能**であるという．上式のように $\boldsymbol{M}$ の左右から $\boldsymbol{T}^{-1}$ と $\boldsymbol{T}$ をかけて対角行列を導き出す操作を $\boldsymbol{M}$ の**対角化**という．上式の右辺は対角行列であり，その対角要素には $\boldsymbol{M}$ の固有値 $\lambda_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ が並ぶことになる．

### 2.2.2　$\boldsymbol{T}$ の構成方法

(2.78) 式や (2.79) 式の対角化における $\boldsymbol{T}$ を説明する．まずは，$\boldsymbol{M}$ の $n$ 本の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ が一次独立であると仮定する（この仮定については後でまた解説する）．それらを並べて

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix} \tag{2.80}$$

と構成し，これを (2.79) 式の対角化に用いる．上の $\boldsymbol{T}$ は，$n$ 次元ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ が横に $n$ 本並んで構成されているので，$n$ 行 $n$ 列の行列となる．

つぎの図は一例である．

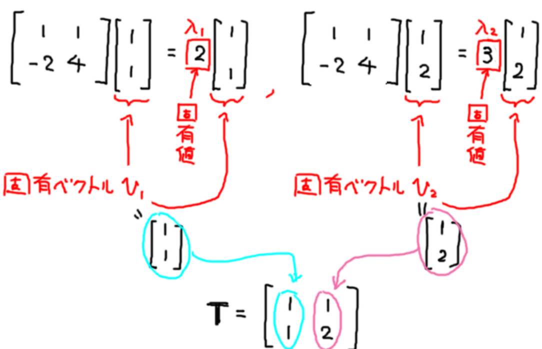


図 2.12　行列 $\boldsymbol{T}$ の構成

**（注意１）**　(2.79) 式で $\boldsymbol{T}^{-1}$ を使っているが，$\boldsymbol{T}$ には逆行列が存在するのか？という疑問が生じる．先に述べた「 $\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ が一次独立である」という仮定が成り立てば，「逆行列は存在する」という結論に到達する．まず，第 1.9 節の内容から，「行列 $\boldsymbol{T}$ を構成する $n$ 本のベクトルが一次独立である」ということから「行列 $\boldsymbol{T}$ のランクは $n$ である」といえる．さらに，第 1.11.3 節の内容から，「行列 $\boldsymbol{T}$ のランクは $n$ である」ことから「行列 $\boldsymbol{T}$ は正則行列」となり，「逆行列 $\boldsymbol{T}^{-1}$ は存在する」といえる．

**（注意２）**　では，どんな行列でも「$\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ が一次独立である」という仮定を満たすことができるのだろうか？これに関しては残念ながらそうではなく，この仮定に該当しない行列もある．その場合，その行列は対角化できないということになる．これに関しては後の節で述べる．

上記の注意２のように，「いろいろな行列を考えたとき，対角化可能なものもあれば，そうでないものもある」ということになる．ここではまず，対角化可能な行列を対象に考察していくことにする．

### 2.2.3　対角化の例

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{2.81}$$

を対角化せよ．

$\boldsymbol{M}$ を対角化をするためには，(2.79) 式に現れる行列 $\boldsymbol{T}$ が必要である．それを求めるには，2 本の一次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ を求めなければならない．この例の場合，固有ベクトルはすでに (2.58) 式で

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.82}$$

と求められているので，それをここで利用する．上の 2 本の固有ベクトルは一次独立である．(2.80) 式に従い，

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.83}$$

と構成する（図 2.12 参照）．これを用いて (2.79) 式を書くと，

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.84}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{2.85}$$

となり，対角化できた．

なお，この右辺に表されている 2 と 3 は，(2.41) 式で求められた $\boldsymbol{M}$ の固有値 $\lambda_1$ と $\lambda_2$ である．(2.79) 式の様子を図 2.13 で再確認しておこう．

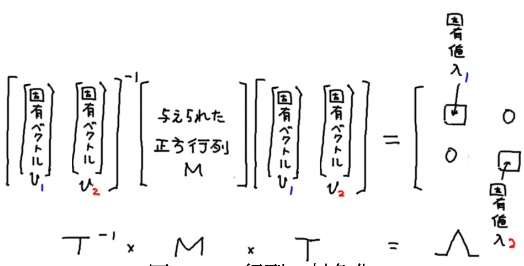


図 2.13　行列の対角化

この図の右辺の行列の対角要素には固有値が現れることに注意しよう．したがって，(2.84) 式で実際に逆行列や積を計算しなくても，(2.85) 式には対角要素が固有値の対角行列を書けばよい．た

だし，固有値 $\lambda_1, \lambda_2$ の順番は重要で，固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の順番と対応がとれていなければならない．

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.86}$$

を対角化せよ．

この行列は (2.42) 式のものであり，その固有ベクトルは (2.63) 式と (2.64) 式で求められている．対角化のための $\boldsymbol{T}$ は，それら固有ベクトルを用いて (2.80) 式に従い

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.87}$$

と構成される．これを用いると $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{MT}$ は

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{MT} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \end{bmatrix} \tag{2.88}$$

となる．なお，この右辺には (2.43) 式で求めた固有値 $\lambda_1$ と $\lambda_2$ が現れている．

### 2.2.4　対角化の手順のまとめ

$n$ 次正方行列の対角化の手順をまとめるとつぎのようになる．

(1) 固有値を求める．
(2) 固有ベクトルを求める．
(3) 固有ベクトルを並べた行列 $\boldsymbol{T}$ をつくる．ただし，$\boldsymbol{T}$ が正則行列になるためには，$n$ 本の固有ベクトルが一次独立でなければならない．
(4) $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{MT}$ から対角行列を導く．

### 2.2.5　なぜ $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{MT}$ か？

なぜ $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{MT}$ という変換で対角行列が生じるかを説明する．これまで例として用いてきた

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{2.89}$$

の場合，つぎのように説明できる．

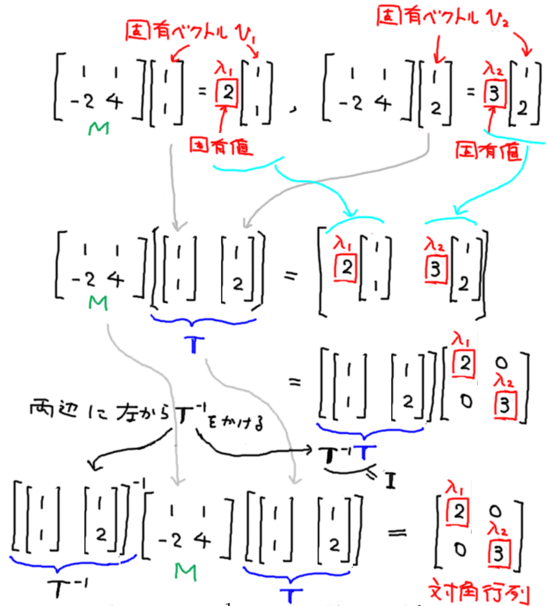


図 2.14 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}$ が現れる理由

上記の様子を $n$ 次正方行列に一般化するとつぎのようになる．$\lambda_i$ が固有値，$\boldsymbol{v}_i$ が固有ベクトルであることから

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1\boldsymbol{v}_1, \quad \boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2\boldsymbol{v}_2, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_n = \lambda_n\boldsymbol{v}_n \tag{2.90}$$

が成り立つ．これら $n$ 個の式を 1 つにまとめると

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{M}\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1\boldsymbol{v}_1 & \lambda_2\boldsymbol{v}_2 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.91}$$

と書ける．ここで

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix} \tag{2.92}$$

とすると，

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{2.93}$$

となる．$\boldsymbol{T}$ に逆行列が存在すれば，それを左からかけて

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{2.94}$$

となる．

### 2.2.6　どんな行列でも対角化可能とは限らない

どんな正方行列でも対角化が可能であると話がすっきりするのだが，残念ながらそうとは限らない．

まず，対角化可能な行列の例として，例えば，

- $n$ 個の固有値が互いに異なる（重複する固有値がない）正方行列
- 対称行列

などが知られている．これ以外にも対角化可能な行列はあるので，多くの行列は対角化可能である．

一方，対角化できない行列もやはり数多くある．(2.44) 式の例のように固有値に重複するものがある場合，対角化できないことがある．ただし，固有値に重複するものがあっても対角化可能なものもある．

対角化できない行列も含めたより一般的な理論となると，対角行列に限定しない「ジョルダン標準形」という形式を導入することになる．ジョルダン標準形については第 2.3 節で述べる．

### 2.2.7　$\boldsymbol{M}^k$ を求める式

与えられた行列 $\boldsymbol{M}$ に対して，$\boldsymbol{T}$ を用いて

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda} \tag{2.95}$$

という形式に変換したとしよう．上式の $\boldsymbol{\Lambda}$ は対角行列，あるいはジョルダン標準形とする．したがって，$\boldsymbol{\Lambda}^k$ は容易に計算できる．

このとき，$\boldsymbol{M}^k$ も容易に求めることができ，それは

$$\boldsymbol{M}^k = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{T}^{-1} \tag{2.96}$$

によって得られる．

**(補足)**：(2.95) 式から (2.96) 式を導いてみよう．(2.95) 式の両辺を $k$ 乗すると

$$(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T})^k = \boldsymbol{\Lambda}^k \tag{2.97}$$

となる．上式の左辺は

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T})^k &= \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}\cdots\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}\\ &= \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{I}\boldsymbol{M}\boldsymbol{I}\cdots\boldsymbol{I}\boldsymbol{M}\boldsymbol{I}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}\\ &= \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}\cdots\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}\\ &= \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}^k\boldsymbol{T}\end{aligned} \tag{2.98}$$

と変形できる．(2.97) 式と (2.98) 式から

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}^k\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda}^k \tag{2.99}$$

が成り立ち，両辺に左から $\boldsymbol{T}$, 右から $\boldsymbol{T}^{-1}$ を掛けると

$$\boldsymbol{M}^k = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{T}^{-1} \tag{2.100}$$

が得られる．

### 2.2.8　$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{M}^k$ と固有値の関係

システムの解析をするとき，$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{M}^k$ が収束するのか発散するのかを知りたいことがある．このときに便利な判別法として，$\boldsymbol{M}$ の固有値だけを用いる方法がある（固有ベクトルや対角化は行わなくてもよい）．

例えば，$\boldsymbol{M}$ の $n$ 個の固有値がすべて絶対値 1 未満であれば，$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{M}^k$ は零行列に収束する（(2.10) 式はその一例である）．その他にも，線形連立微分方程式の解の安定性を固有値を用いて判別することもできる．

## 2.3　ジョルダン標準形

ジョルダン標準形についてきちんと説明すると，かなりの紙数を要する．この節では，ある具体例を示すことによってジョルダン標準形を概説することにする．

### 2.3.1　ジョルダン標準形

ジョルダン標準形とは，例えば

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{2.101}$$

のような形式をもつ正方行列である．対角行列に近いのだが，対角要素の右（上）のところどころに 1 が入っている．これらの行列の $k$ 乗は，それぞれ

$$\begin{bmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 5^k & k5^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}5^{k-2} \\ 0 & 5^k & k5^{k-1} \\ 0 & 0 & 5^k \end{bmatrix} \tag{2.102}$$

となる．対角行列の $k$ 乗ほど簡潔ではないが，ジョルダン標準形 の $k$ 乗も解析がしやすい．したがって，対角化ができない場合にはジョルダン標準形に変換する意義は大きい．

### 2.3.2　ジョルダン標準形への変換

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \tag{2.103}$$

に対して，対角化を（実は不可能なのだが）試みてみる．

まず，固有値を $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}| = 0$ を用いて求めると

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \tag{2.104}$$

となり，2 つの固有値が重複している．

つぎに固有ベクトルを第 2.1.6 節の方法で求める．まずは $\lambda_1$（値は 2）に対応する固有ベクトルが

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.105}$$

として求められる．つぎに $\lambda_2$（これも値が 2）に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_2$ を求める．例えば，

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.106}$$

であるとか，

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{2.107}$$

が求められるが，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の 2 本が一次独立になるようなものは求められない．したがって，

$$\boldsymbol{T} = \tilde{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \tag{2.108}$$

の逆行列は存在せず，対角化できない．

対角化できないので，ここで方針を変えよう．

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.109}$$

となるような $\boldsymbol{T}$ は存在しないとあきらめて，代わりに

$$\tilde{\boldsymbol{T}}^{-1}\boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.110}$$

となるような $\tilde{\boldsymbol{T}}$ を見つけ出すことにしよう．この式の右辺はジョルダン標準形である．

(2.110) 式の左から $\tilde{\boldsymbol{T}}$ を掛けると，

$$\boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{T}} = \tilde{\boldsymbol{T}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.111}$$

となる．ここで $\tilde{\boldsymbol{T}}$ を

$$\tilde{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{v}}_1 & \tilde{\boldsymbol{v}}_2 \end{bmatrix} \tag{2.112}$$

として，2 本のベクトル $\tilde{\boldsymbol{v}}_1, \tilde{\boldsymbol{v}}_2$ から構成することを考える．では，$\tilde{\boldsymbol{v}}_1$ と $\tilde{\boldsymbol{v}}_2$ はそれぞれどのようなベクトルとして求めることができるだろうか．

(2.111) 式に (2.112) 式を代入すると，

$$\boldsymbol{M}\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{v}}_1 & \tilde{\boldsymbol{v}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{v}}_1 & \tilde{\boldsymbol{v}}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.113}$$

となる．この式はつぎのように 2 つの式に分解できる．

$$\boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{v}}_1 = 2\tilde{\boldsymbol{v}}_1 \tag{2.114}$$

$$\boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{v}}_2 = \tilde{\boldsymbol{v}}_1 + 2\tilde{\boldsymbol{v}}_2 \tag{2.115}$$

まず上側の (2.114) 式を満たす $\tilde{\boldsymbol{v}}_1$ は，行列 $\boldsymbol{M}$ の固有値 2 に対する固有ベクトルである．したがって (2.105) 式と同じく

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.116}$$

として求められる．これに対して (2.115) 式を満たす $\tilde{\boldsymbol{v}}_2$ はつぎのように求められる．まず (2.115) 式を

$$(\boldsymbol{M} - 2\boldsymbol{I})\tilde{\boldsymbol{v}}_2 = \tilde{\boldsymbol{v}}_1 \tag{2.117}$$

と変形する．$\boldsymbol{M}$ とさきほど求めた (2.116) 式の $\tilde{\boldsymbol{v}}_1$ を代入すると，

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\}\tilde{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.118}$$

となる．これを満たす $\tilde{\boldsymbol{v}}_2$ は簡単な計算により

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.119}$$

と求められる．

こうして

$$\tilde{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.120}$$

が求められた．この $\tilde{\boldsymbol{T}}$ の逆行列は存在し，$\tilde{\boldsymbol{T}}^{-1}\boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{T}}$ を計算すると，

$$\tilde{\boldsymbol{T}}^{-1}\boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.121}$$

となることが確かめられる．

以上をまとめておこう．

正方行列

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \tag{2.122}$$

の対角化はできない．しかし，

$$\tilde{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.123}$$

を用いて，

$$\tilde{\boldsymbol{T}}^{-1}\boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.124}$$

というジョルダン標準形に変換できる．

計算は省略するが，3 行 3 列の例を示しておく．

正方行列

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.125}$$

の対角化はできない．しかし，

$$\tilde{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.126}$$

を用いて，

$$\tilde{\boldsymbol{T}}^{-1}\boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.127}$$

というジョルダン標準形に変換できる．

(2.125) 式の $\boldsymbol{M}$ は (2.44) 式と同じであり，固有値は (2.45) 式に示されるように，1 と 2 と 2 で，2 が重複している．この重複が対角化できない原因となっている．

ただし，固有値の重複があると必ず対角化できないのかというと，そうでもない．次の例の $\boldsymbol{M}$ の固有値は 1 と 2 と 2 で，2 が重複している．しかし，(2.130) 式のように対角化できる．

正方行列

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.128}$$

は，

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.129}$$

を用いて，

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.130}$$

と対角行列に変換できる．

固有値の重複と対角化の関係をまとめておこう．

- 固有値に重複がなければ対角化可能である．
- 固有値に重複がある場合，(2.125) 式の例のように対角化できない行列もあれば，(2.128) 式の例のように対角化可能な行列もある．

(2.125) 式の $\boldsymbol{M}$ と (2.128) 式の $\boldsymbol{M}$ は同じ固有値を持っているが，対角化の可能性の違いの原因は，重複する固有値 2 に対応する独立な固有ベクトルの本数（少し難しく言うと，「固有値 2 に対する固有空間の次元」）の違いである．(2.125) 式の場合，固有値 2 に対応する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.131}$$

の 1 本しかない．一方，(2.128) 式の場合では，固有値 2 に対応する固有ベクトルとして，

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.132}$$

という 2 本の独立な固有ベクトルが存在する．

重複した固有値 $\lambda$ に対応する独立な固有ベクトルが何本存在するか（固有空間の次元）は，$(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の次元であり，それには $\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}$ のランクの値がいくつかであるかが関係する．(2.125) 式の $\boldsymbol{M}$ と (2.128) 式 の $\boldsymbol{M}$ では，$2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}$ のランクの値が異なっている．

上述のように対角化の可能性を論じるとなると，線形ベクトル空間の定理が必要となってくる．興味のある読者は線形代数の参考書を参照することをおすすめする．

# 第 3 章

# 行列のさまざまな性質

## 3.1　復習

### 3.1.1　転置行列

例えば，行列 $\boldsymbol{M}$ が

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

と与えられたとしよう．これに対する転置行列 $\boldsymbol{M}^T$ は

$$\boldsymbol{M}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

となる．行列 $\boldsymbol{M}$ の $(i, j)$ 要素は，転置行列 $\boldsymbol{M}^T$ では $(j, i)$ 要素になっている．

### 3.1.2　対称行列

$\boldsymbol{M}$ が正方行列であり，$\boldsymbol{M}^T = \boldsymbol{M}$ となるとき，$\boldsymbol{M}$ は**対称行列**であると呼ばれる．

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

図 3.1　対称行列

### 3.1.3　対角行列

正方行列で，対角要素以外がすべて 0 の行列を**対角行列**という．

すべて0

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

対角要素

図 3.2　対角行列

### 3.1.4　正則行列

$\boldsymbol{M}$ は正方行列とする．さらに $\boldsymbol{M}$ が正則のときつぎの性質をもつ．

- $\boldsymbol{M}$ の行列式 $|\boldsymbol{A}|$ は零ではない．
- $\boldsymbol{M}$ のランクは $n$ である．
- $\boldsymbol{M}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在する．

## 3.2　直交行列

### 3.2.1　直交行列とその性質

実数の正方行列 $\boldsymbol{M}$ に逆行列 $\boldsymbol{M}^{-1}$ が存在するとしよう．そして，$\boldsymbol{M}$ の転置行列 $\boldsymbol{M}^T$ を考える．一般的には $\boldsymbol{M}^T \neq \boldsymbol{M}^{-1}$ であるが，つぎの性質を満たす正方行列を直交行列という．

正方行列 $\boldsymbol{U}$ が

$$\boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{U}^{-1} \tag{3.3}$$

を満たす場合，$\boldsymbol{U}$ を**直交行列**という．すなわち，直交行列は

$$\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{I} \tag{3.4}$$

を満たす行列である．

直交行列においてつぎの性質が成り立つ．

$n$ 次の直交行列を

$$\boldsymbol{U} = \left[\ \boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_n\ \right] \tag{3.5}$$

と $n$ 本の列ベクトルに分解したとき，

$$\|\boldsymbol{u}_i\| = \sqrt{\boldsymbol{u}_i^T\boldsymbol{u}_i} = 1\ ,\quad (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{u}_i^T\boldsymbol{u}_j = 0\ (i \neq j) \tag{3.6}$$

が成り立つ．すなわち，各ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ は大きさが 1 であり，異なるベクトルは互いに直交している．

2 次および 3 次の直交行列は図 3.3 のようなベクトルから構成されている．

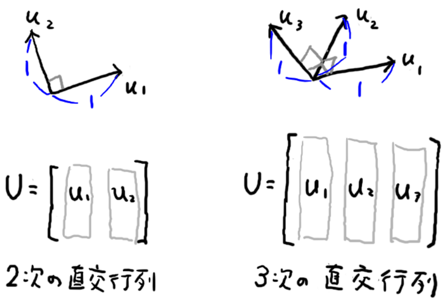


図 3.3　直交行列を構成するベクトルの直交性

つぎの性質は，ベクトルに直交行列 $\boldsymbol{U}$ を掛けても大きさは変わらないことを述べている．

> $\boldsymbol{U}$ を直交行列とする．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ はベクトルでつぎの関係があるとする．
>
> $$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{x} \tag{3.7}$$
>
> このとき，
>
> $$\|\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\| \tag{3.8}$$
>
> か成り立つ．

(3.8) 式が成り立つ理由は，$\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}$ なので

$$\|\boldsymbol{y}\|^2 = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|^2 \tag{3.9}$$

が成り立つからである．

## 3.3　行列の固有値と行列式とトレース

正方行列 $\boldsymbol{M}$ の固有値 $\lambda_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ と行列式 $|\boldsymbol{M}|$ にはつぎの関係がある．

> 「行列式」と「固有値の積」は同じ値になる．すなわち，
>
> $$|\boldsymbol{M}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{3.10}$$
>
> が成り立つ．

正方行列 $\boldsymbol{M}$ の対角要素 $m_{ii}$ $(i = 1, \cdots, n)$ の和を**トレース**といい，$\mathrm{tr}\boldsymbol{M}$ と書く．

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{M} = m_{11} + m_{22} + \cdots + m_{mm} \tag{3.11}$$

> 「トレース」と「固有値の和」は同じ値になる．すなわち，
>
> $$\mathrm{tr}\boldsymbol{M} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \tag{3.12}$$
>
> が成り立つ．

# 3.4　特異値分解

## 3.4.1　特異値分解とは

正方とは限らない $m$ 行 $n$ 列の行列 $\boldsymbol{M}$ を

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T \tag{3.13}$$

の形に分解する．ただし，$\boldsymbol{U}$ と $\boldsymbol{V}$ は直交行列である．行列 $\boldsymbol{S}$ は

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

という形の行列であり，

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0 \tag{3.15}$$

という大小関係がある．$\sigma_1 \cdots \sigma_r$ は $\boldsymbol{M}$ の**特異値**，$\sigma_1$ は**最大特異値**と呼ばれる．(3.13) 式を $\boldsymbol{M}$ の**特異値分解**という．$r$ の値は $\boldsymbol{M}$ のランクと等しい．

なお，$\boldsymbol{U}$ と $\boldsymbol{V}$ は直交行列なので，

$$\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}\ ,\quad \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I} \tag{3.16}$$

が成り立つ．このことは，

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_m \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

と分解したとき，

$$\|\boldsymbol{u}_i\| = 1\ ,\quad (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = 0 \tag{3.19}$$

$$\|\boldsymbol{v}_i\| = 1\ ,\quad (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = 0 \tag{3.20}$$

が成り立つことを意味する．

## 3.4.2　特異値分解によってわかること

つぎの問題を考えてみよう．

「図 3.4 のように，大きさ 1 でさまざまな方向のベクトル $\boldsymbol{v}$ を考える．これに行列 $\boldsymbol{M}$ を掛けたとき，$\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}$ はどれぐらいの大きさになり，方向はどこを向くか？」

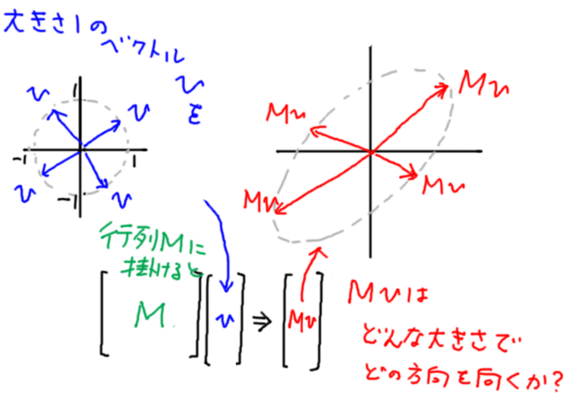


図 3.4　$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{Mv}$ の関係

この問題に対する答えは，行列 $\boldsymbol{M}$ の特異値分解を用いて明らかにすることができる．$\boldsymbol{M}$ が 2 行 2 列の場合に説明がしやすいので，つぎの例を考える．例えば，

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

を特異値分解すると，つぎのようになる（計算方法は省略する）.

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{V}^T \tag{3.22}$$

ただし，

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

である．(3.22) 式で右から $\boldsymbol{V}$ を掛けて，$\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}$（$\boldsymbol{V}$ は直交行列）であることを利用すると

$$\boldsymbol{MV} = \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

となる．$\boldsymbol{V}, \boldsymbol{U}$ を列ベクトルに分解すると上式は

$$\boldsymbol{M} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

すなわち，

$$\boldsymbol{Mv}_1 = 4\boldsymbol{u}_1\ ,\quad \boldsymbol{Mv}_2 = 2\boldsymbol{u}_2 \tag{3.27}$$

となる．ここで (3.19) 式，(3.20) 式で見たように $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_2$ の大きさはすべて 1 であることを思い出そう．そして (3.27) 式の意味を考えるとつぎのように言える．

- $\boldsymbol{M}$ に $\boldsymbol{v}_1$ 方向のベクトルを掛けると，大きさが 4 倍されて $\boldsymbol{u}_1$ 方向を向く．
- $\boldsymbol{M}$ に $\boldsymbol{v}_2$ 方向のベクトルを掛けると，大きさが 2 倍されて $\boldsymbol{u}_2$ 方向を向く．

この様子を図 3.5 に示す．

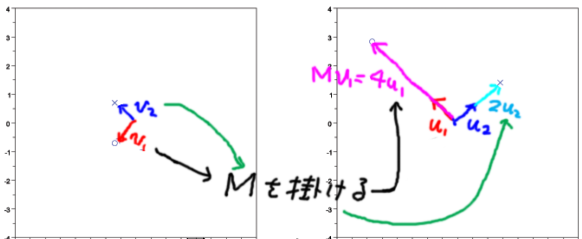


図 3.5　$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{Mv}$

上の例は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の 2 本だけであったが，$\boldsymbol{M}$ に掛けるベクトル $\boldsymbol{v}$ として，大きさが 1 でさまざまな方向をもつベクトルを用いた場合，掛けた結果の $\boldsymbol{Mv}$ は図 3.6 のようになる．

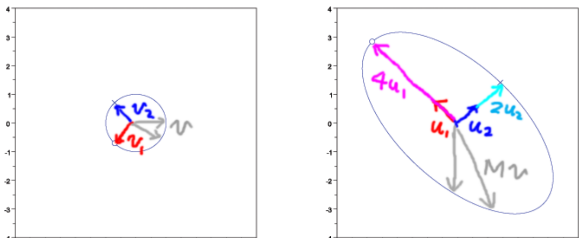


図 3.6　$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{Mv}$

2 次の正則行列に関してつぎのことが言える．

$\boldsymbol{M}$ を 2 次の正則行列とし，大きさが 1 のさまざまな $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{M}$ に掛けるとする．

- $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1$ としたときに $\boldsymbol{Mv}$ の大きさが最も大きくなり，大きさの倍率は最大特異値 $\sigma_1$ と等しい．また，掛けた結果のベクトルは $\boldsymbol{u}_1$ の方向を向く．
- $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2$ としたときに $\boldsymbol{Mv}$ の大きさが最も小さくなり，大きさの倍率は最小特異値 $\sigma_2$ と等しい．また，掛けた結果のベクトルは $\boldsymbol{u}_2$ の方向を向く．

ここで述べていることは 2 次元の話であるが，多次元に拡張することは可能である（その証明は，$\boldsymbol{MV} = \boldsymbol{US}$ の関係と，$\boldsymbol{V}, \boldsymbol{U}$ の各列ベクトルが大きさ 1 で直交していることを利用して行われる）．

## 3.5　対称行列の固有値・固有ベクトル

一般に行列の固有値は複素数になる可能性があるが，対称行列の固有値は実数しかありえない．これを含め，対称行列特有の性質を述べておく．

- 対称行列の固有値は実数である．
- 対称行列の固有ベクトルは互いに直交する．
- 対称行列は直交行列で対角化できる．

証明は線形代数の参考書を参照されたい．

# 3.6　2 次形式

## 3.6.1　2 次形式とは

$n$ 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関する実係数の二次式は **2 次形式**と呼ばれ，

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{3.28}$$

と表される．2 個の変数に関する 2 次形式は，例えば，

$$V(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1 x_2 \tag{3.29}$$

のような形式であり，3 個の変数に関する 2 次形式は，例えば

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, x_3) = {} & 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 \\ & +10x_1x_2 + 11x_1x_3 + 12x_2x_3 \end{aligned} \tag{3.30}$$

のような形式である．

## 3.6.2　対称行列を用いた 2 次形式の表現

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

とすると，2 次形式 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は対称行列 $\boldsymbol{M}$ を用いて

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{x} \tag{3.32}$$

と表される．

例えば，(3.29) 式であれば

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2) &= 2x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2 \\ &= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{3.33}$$

となる．ただし，

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

である．(3.30) 式であれば

$$\begin{aligned} V(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2 \\ &\quad +10x_1x_2+11x_1x_3+12x_2x_3 \\ &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 2 & 5 & \frac{11}{2} \\ 5 & 3 & 6 \\ \frac{11}{2} & 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{3.35}$$

となる．ただし，

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 2 & 5 & \frac{11}{2} \\ 5 & 3 & 6 \\ \frac{11}{2} & 6 & 4 \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

である．

### 3.6.3 正定な 2 次形式と正定行列

$\mathbf{0}$ でない任意の $\boldsymbol{x}$ に対して（$\mathbf{0}$ 以外のどんな $\boldsymbol{x}$ に対しても），

$$V(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}>0 \tag{3.37}$$

が成り立つならば，「2 次形式 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ は**正定**，あるいは**正定値**である」という．このとき，行列 $\boldsymbol{M}$ は**正定行列**と呼ばれ，「$\boldsymbol{M}>0$」と書く．

与えられた 2 次形式が正定かどうかを判定したいとき，対称行列 $\boldsymbol{M}$ を調べることにより，つぎのように判定できる．

> 2 次形式 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}$ が正定であるための必要十分条件は，行列 $\boldsymbol{M}$ の固有値がすべて正であることである．

$\boldsymbol{M}$ が 2 行 2 列の場合にはつぎが成り立つ．

> 2 次の対称行列
>
> $$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \tag{3.38}$$
>
> によって表される 2 次形式 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}$ が正定であるための必要十分条件は，
>
> $$a>0\ , \quad |\boldsymbol{M}|=ad-b^2>0 \tag{3.39}$$
>
> である．

### 3.6.4 負定な 2 次形式と負定行列

$\mathbf{0}$ でない任意の $\boldsymbol{x}$ に対して（$\mathbf{0}$ 以外のどんな $\boldsymbol{x}$ に対しても），

$$V(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}<0 \tag{3.40}$$

が成り立つならば，「2 次形式は**負定**，あるいは**負定値**である」といい，$\boldsymbol{M}$ は負定行列と呼ばれる．

> 2 次形式 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}$ が負定であるための必要十分条件は，行列 $\boldsymbol{M}$ の固有値がすべて負であることである．

$\boldsymbol{M}$ が 2 行 2 列の場合にはつぎが成り立つ．

> 2 次の対称行列
>
> $$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \tag{3.41}$$
>
> によって表される 2 次形式 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}$ が負定であるための必要十分条件は，
>
> $$a < 0\ ,\quad |\boldsymbol{M}| = ad - b^2 > 0 \tag{3.42}$$
>
> である．

### 3.6.5　2 次形式の正負と固有値の関係

2 次形式と $\boldsymbol{M}$ の固有値の関係はつぎのように説明できる．第 3.5 節で述べたように，対称行列は直交行列で対角化できる．すなわち，対称行列 $\boldsymbol{M}$ に対して，直交行列 $\boldsymbol{U}$ を用いて，

$$\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

と対角化できる．ここで $\lambda_i\ (i = 1, \cdots, n)$ は $\boldsymbol{M}$ の固有値である．これに基づき，

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} \tag{3.44}$$

という 2 次形式に対して，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{z} \tag{3.45}$$

という変数変換を行うと

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} &= (\boldsymbol{U}\boldsymbol{z})^T\boldsymbol{M}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{z}) \\ &= \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}\boldsymbol{z} \\ &= \boldsymbol{z}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ &= \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_n z_n^2 \end{aligned} \tag{3.46}$$

という形式に変換できる．(3.45) 式の $\boldsymbol{U}$ は正則行列なので，$\boldsymbol{x}$ が任意の $n$ 次元ベクトルを表すとき，$\boldsymbol{z}$ はさまざまなをとるが，(3.46) 式の各項にある $z_1^2, \cdots, z_n^2$ は正または 0 の値をとる．これより 2 次形式 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}$ の正負は (3.46) に含まれている固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ の正負に影響を受ける．

例えば固有値 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ がすべて正ならば，(3.46) 式は正になり，2 次形式は正定になる．逆に固有値 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ がすべて負ならば，(3.46) 式は負になり 2 次形式は負定になる．

## 3.7　列フルランクと行フルランク

「列フルランク」の行列とは，その行列を列ベクトルに分解したとき，それら列ベクトルが一次独立になっている行列である．その行列のランクは，列の数に等しい（図 3.7）．

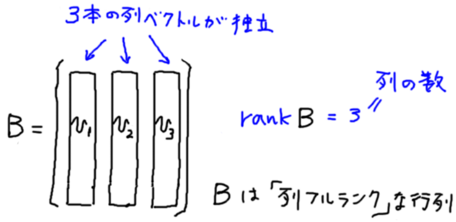


図 3.7　列フルランクな行列

「行フルランク」の行列とは，その行列を行ベクトルに分解したとき，それら行ベクトルが一次独立になっている行列である．その行列のランクは，行の数に等しい（図 3.8）．

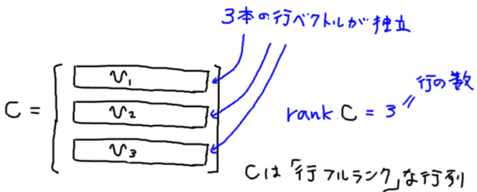


図 3.8　行フルランクな行列

> $\boldsymbol{B}$ が列フルランクの場合，$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}$ は正定行列になり，正則でもあるので $(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})^{-1}$ が存在する．また，$\boldsymbol{C}$ が行フルランクの場合，$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T$ は正定行列になり，正則でもあるので $(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T)^{-1}$ が存在する．

これらの様子は図 3.9 で表される．

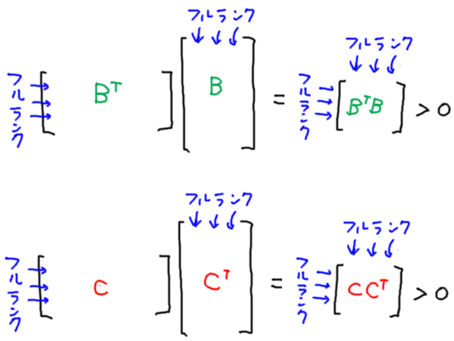


図 3.9　$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}$ あるいは $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T$

なお，図 3.10 の場合には掛けた結果はフルランクとは限らない．

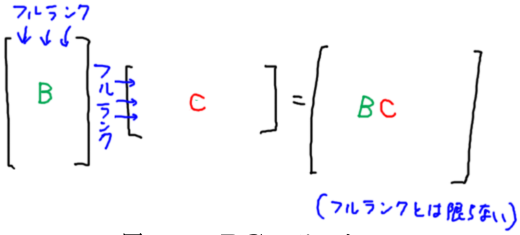


図 3.10　$\boldsymbol{BC}$ のランク

**補足：** 行フルランク，あるいは列フルランクになるかは $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ のサイズやランクによってさまざまである．例えば，図 3.11 の場合には列フルランクになる．

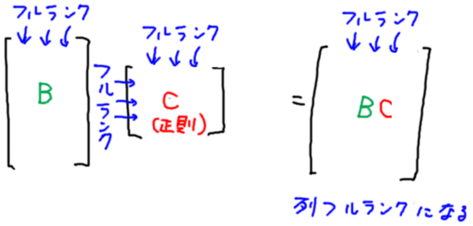


図 3.11　$\boldsymbol{BC}$ のランク

## 3.8　擬似逆行列を用いた連立一次方程式の解

連立一次方程式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{3.47}$$

の解を求めることを考える．

もし $\boldsymbol{A}$ が正則行列ならば，$\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在して，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{3.48}$$

が解になるが，$\boldsymbol{A}$ が正則行列でない場合は $\boldsymbol{x}$ をどう表現すればよいだろうか．

$\boldsymbol{A}$ が正方だが正則行列でない場合，あるいは縦長行列や横長行列の場合も含めて，(3.47) 式の一般解は，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A})\boldsymbol{k} \tag{3.49}$$

と表すことができる．この式における $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ は擬似逆行列と呼ばれる行列である．まずは $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ について説明する．

### 3.8.1　擬似逆行列について

正方行列とは限らない実数行列 $\boldsymbol{A}$ をつぎのように分解することができる．

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C} \tag{3.50}$$

ただし，$\boldsymbol{B}$ は列フルランクの行列，$\boldsymbol{C}$ は行フルランクの行列である（図 3.10 の右辺の行列を $\boldsymbol{A}$ として左辺のように $\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ に分解したと考えればよい）．これら $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ を用いて，

$$\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T)^{-1}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T \tag{3.51}$$

で計算される行列 $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ を，$\boldsymbol{A}$ の**擬似逆行列**（ムーア・ペンローズの一般化逆行列）という．

(3.50) 式を具体的にどう分解するか，その計算方法はさておき，ここではとりあえず (3.50) 式の分解が可能であることを認めておこう（実際に分解可能であり，計算方法もあるが，ここでは省略する）．そして，(3.51) 式も計算可能であることも認めて，つぎの議論に進んでほしい．

$\boldsymbol{A}^{\dagger}$ と $\boldsymbol{A}$ との間にはつぎの関係が成り立つ．

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A} \tag{3.52}$$

$$\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger} \tag{3.53}$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger})^T = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger} \tag{3.54}$$

$$(\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A})^T = \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A} \tag{3.55}$$

これらの確認は (3.50) 式と (3.51) 式を代入して計算すればできる．(3.54) 式と (3.55) 式より，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger}$ と $\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A}$ は対称行列であることがわかる．

$\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ に対しては $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$ が成立するが，擬似逆行列に対しては $\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{I}$ は（一般的には）成り立たない（場合によっては $\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ や $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{I}$ が成り立つこともある）．

### 3.8.2　擬似逆行列を用いた連立一次方程式の解

連立一次方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の一般解は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A})\boldsymbol{k} \tag{3.56}$$

と表わされる．ただし，$\boldsymbol{k}$ は任意の実数ベクトルである．

この式の意味は一見しただけではわかりにくい．図で表すとつぎのようになる．

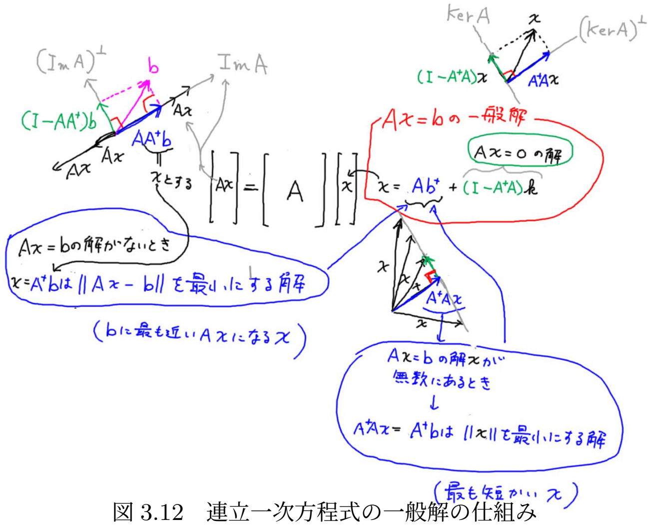


図 3.12　連立一次方程式の一般解の仕組み

(3.56) 式と図 3.12 の意味を少しずつ解説していく．まずは，(3.56) 式の第 2 項の $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A})\boldsymbol{k}$ について，つぎのことが言える．これは (3.52) 式を用いれば確認できる．

$\boldsymbol{A}$ に $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A})\boldsymbol{k}$ を掛けても $\boldsymbol{0}$ になるだけである．すなわち，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A})\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0} \tag{3.57}$$

が成り立つ．

これは (3.56) 式の第 2 項 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A})\boldsymbol{k}$ が，斉次方程式 $\boldsymbol{Ax}_0 = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{x}_0$ になっている（Ker $\boldsymbol{A}$ に属するベクトルである）ことを意味している．$\boldsymbol{k}$ は斉次方程式の一般解を表すための定数ベクトルである．

したがって，(3.56) 式は

$$「\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \text{ の一般解」} = 「\text{特殊解」} + 「\text{斉次方程式の一般解」} \tag{3.58}$$

という形式になっている．

では，(3.56) 式の第 1 項 $\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b}$ はどんな意味の特殊解なのかをつぎに説明する．

> $\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b}$ は，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解が無数に存在する場合と，解がない（存在しない）場合でそれぞれ異なる意味をもつ．
>
> (i) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解が無数に存在する場合，$\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b}$ は $\|\boldsymbol{x}\|$ を最小にする解になっている．
> (ii) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解がない場合，$\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b}$ は $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ になっている．

上記の (i) において，$\|\boldsymbol{x}\|$ は $\boldsymbol{x}$ のユークリッドノルムを表し，

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \tag{3.59}$$

である．$\|\boldsymbol{x}\|$ は $\boldsymbol{x}$ の大きさを表す．解が無数にあるときに $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b}$ とした解を「**最短距離解**」という．

上記の (ii) において，$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|$ は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{b}$ の誤差の大きさを表している．もし $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ がどんな $\boldsymbol{x}$ でも成立しないとしても，誤差 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|$ が最小となる（という意味で最良な）$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b}$ である．この解を「**最小二乗解**」という．

### 3.8.3　最短距離解である理由

この節では，上記の (i) の場合，$\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b}$ が最短距離解である理由を説明する．「Ker」 や「Im」などの空間や「射影」という言葉を使っているので，「線形ベクトル空間」の知識が必要となるが，それらの知識がなくても図から意味は読み取れると思う．

まず，一般解 $\boldsymbol{x}$ はつぎのように分解できる（図 3.13）．

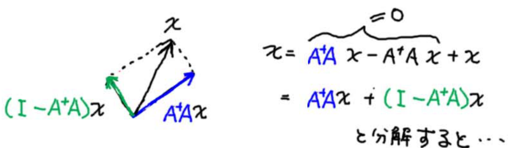


図 3.13

ここで現れる $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A})$ という行列は $\boldsymbol{x}$ を $\mathrm{Ker}\boldsymbol{A}$ に射影する行列になっている（図 3.14）．

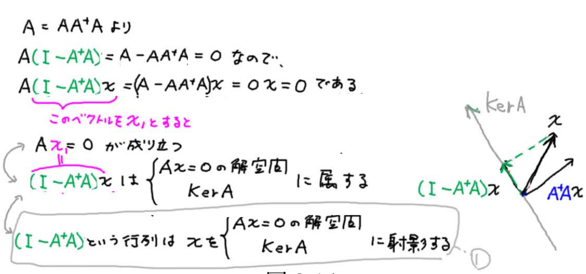


図 3.14

また，図 3.13 での分解で生じた 2 本のベクトルは直交している（図 3.15）．

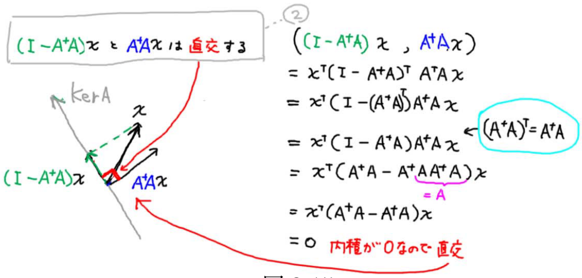


図 3.15

図 3.14 と図 3.15 より，$\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A}$ は Ker$\boldsymbol{A}$ の直交補空間への射影行列になっている（図 3.16）.

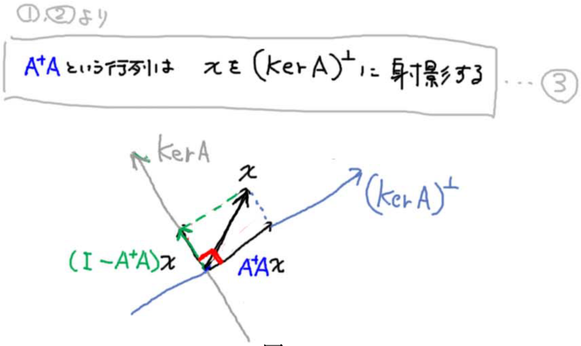


図 3.16

ところで，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の解が無数にある場合，解 $\boldsymbol{x}$ はある特殊解 $\boldsymbol{x}_p$ に Ker$\boldsymbol{A}$ に属するベクトルを継ぎ足したベクトルで表される（図 3.17）.

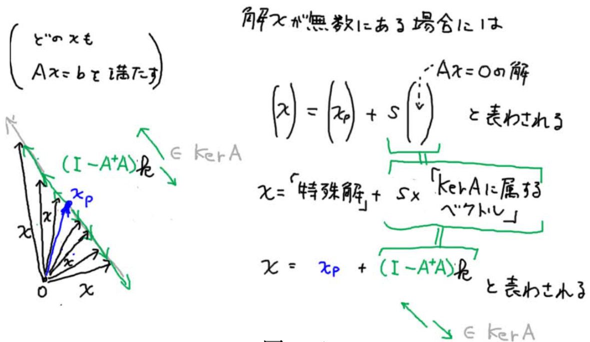


図 3.17

このさまざまな $\boldsymbol{x}$ の中で，長さが最も短いものは Ker$\boldsymbol{A}$ の方向に直交するベクトルである（図 3.18）.

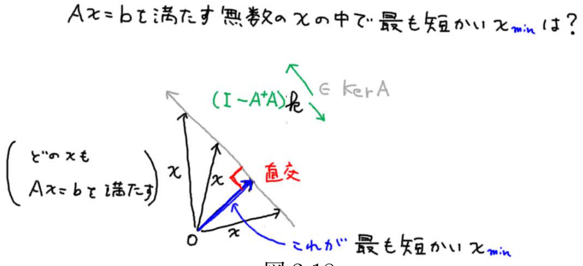


図 3.18

図 3.16 より，Ker$\boldsymbol{A}$ の直交補空間へ $\boldsymbol{x}$ を射影する行列は $\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A}$ なので，$\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ が最も短い $\boldsymbol{x}$ となる．その $\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が成り立つことから，$\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{b}$ と表される（図 3.19）．

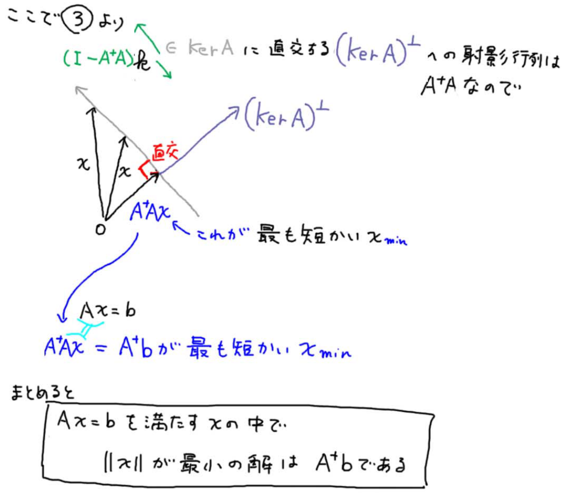


図 3.19

こうして，$\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{b}$ が上記の (i) で述べたような最短距離解であることが示された．また，図 3.12 の中の右半分が説明できたことになる．

### 3.8.4　最小二乗解である理由

上記 (ii) で述べたように，解が存在しない場合には，$\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{b}$ は $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|$ を最小にする解になる．この理由を説明する．

まずは，図 3.20 のように，

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{b}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{b} \tag{3.60}$$

と分解する．

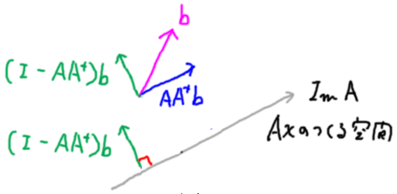


図 3.20

ここで $\boldsymbol{Ax}$ というベクトルがつくる空間 $\mathrm{Im}\boldsymbol{A}$ を考える．その空間に属するベクトル $\boldsymbol{Ax}$ に対して，$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{AA}^{\dagger})\boldsymbol{b}$ というベクトルは直交している（図 3.20 と図 3.21）．

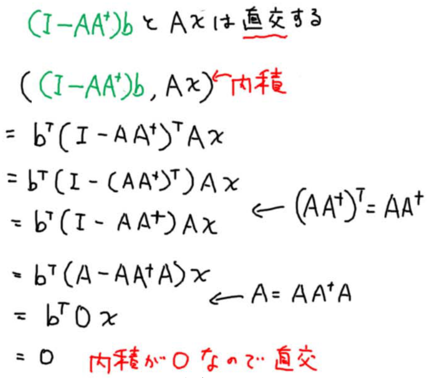


図 3.21

また，図 3.20 の分解で生じた 2 本のベクトル $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{AA}^{\dagger})\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{AA}^{\dagger}\boldsymbol{b}$ も直交している（図 3.22）．

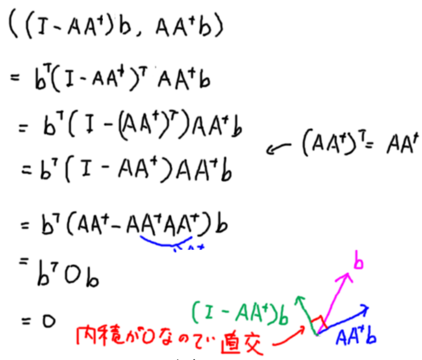


図 3.22

したがって，$\boldsymbol{AA}^{\dagger}$ は $\boldsymbol{b}$ の $\mathrm{Im}\boldsymbol{A}$ への直交射影を生じさせる射影行列になっている（図 3.23）．

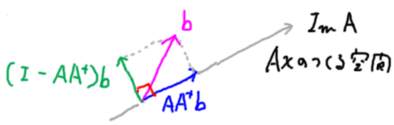


図 3.23

$\boldsymbol{b}$ を $\mathrm{Im}\boldsymbol{A}$ への直交射影した $\boldsymbol{AA}^{\dagger}\boldsymbol{b}$ は，$\mathrm{Im}\boldsymbol{A}$（$\boldsymbol{Ax}$ がつくる空間）における $\boldsymbol{Ax}$ の中で，$\boldsymbol{b}$ に最も近いベクトルになっている（図 3.24）．したがって，$\boldsymbol{Ax}$ を $\boldsymbol{AA}^{\dagger}\boldsymbol{b}$ とした場合，すなわち，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b} \tag{3.61}$$

とすると，$\|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|$ が最小となる．

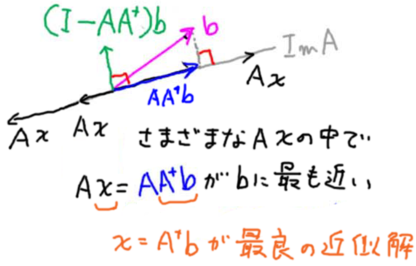


図 3.24

### 3.8.5　$\boldsymbol{A}$ が横長で行フルランクの場合

$\boldsymbol{A}$ が横長行列で行フルランクの場合を考えよう．この場合には，(3.50) 式の $\boldsymbol{A}$ の分解において $\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{I}$ に，$\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{A}$ とすることができる．すると (3.51) 式の擬似逆行列 $\boldsymbol{A}^\dagger$ は

$$\boldsymbol{A}^\dagger = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1} \tag{3.62}$$

となり，$\boldsymbol{A}^\dagger$ を $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}^T$ で書き表すことができる．

また，$\boldsymbol{A}$ が横長行列で行フルランクの場合，連立一次方程式はつぎの図のような形になる．

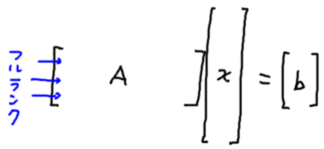


図 3.25　$\boldsymbol{A}$ が横長行列で行フルランクの場合

この場合，

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \text{ の行の数} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

なので，連立一次方程式の解は存在し，解は無数にある．そして，(3.56) 式で表される一般解は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{k} \tag{3.64}$$

となり，この第 1 項の

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{b} \tag{3.65}$$

が $\|\boldsymbol{x}\|$ を最小にする最短距離解になる．なお，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1} \\ &= \boldsymbol{I} \end{aligned} \tag{3.66}$$

が成り立つ．

まとめるとつぎのようになる．

$\boldsymbol{A}$ が横長行列で行フルランクの場合，擬似逆行列は

$$\boldsymbol{A}^\dagger = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1} \tag{3.67}$$

と表される．$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ は無数に存在し，(3.64) 式で表される．このうち

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{b} \tag{3.68}$$

は $\|\boldsymbol{x}\|$ を最小にする最短距離解になる

### 3.8.6　$\boldsymbol{A}$ が縦長で列フルランクの場合

$\boldsymbol{A}$ が縦長行列で列フルランクの場合，(3.50) 式の $\boldsymbol{A}$ の分解において，$\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{A}$ に，$\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{I}$ とすることができる．すると (3.51) 式の擬似逆行列 $\boldsymbol{A}^\dagger$ は

$$\boldsymbol{A}^\dagger = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T \tag{3.69}$$

となる．

また，連立一次方程式は図 3.26 の形式になる．

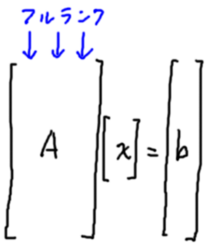


図 3.26　$\boldsymbol{A}$ が縦長行列で列フルランクの場合

この解は一般には存在しない（ $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{A}$ の列ベクトルの線形結合で表されるものになっていれば解が存在するが，そうでなければ解はない）．(3.69) 式が成り立つとき，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} \\ &= \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{3.70}$$

となる．したがって，(3.56) 式の形式で一般解を表そうとした場合，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A})\boldsymbol{k} \\ &= (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} \end{aligned} \tag{3.71}$$

となる．$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解がない場合には (3.71) 式の $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たすのではなく，$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|$ を最小にする解を意味する．

なお，$\boldsymbol{b}$ によっては $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在する場合もある．そのときには $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|$ の最小値が 0 となり，(3.71) 式の $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす解になる．

まとめるとつぎのようになる．

$\boldsymbol{A}$ が縦長行列で列フルランクの場合，擬似逆行列は

$$\boldsymbol{A}^{\dagger} = (\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{T} \tag{3.72}$$

と表される．$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ は一般には存在しない（存在する場合もある）が,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{b} \tag{3.73}$$

とすると，それは $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ になっており，最小二乗解と呼ばれる．